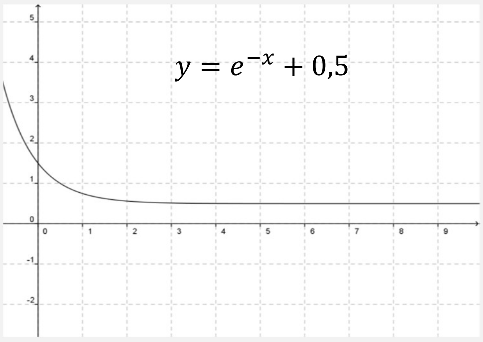
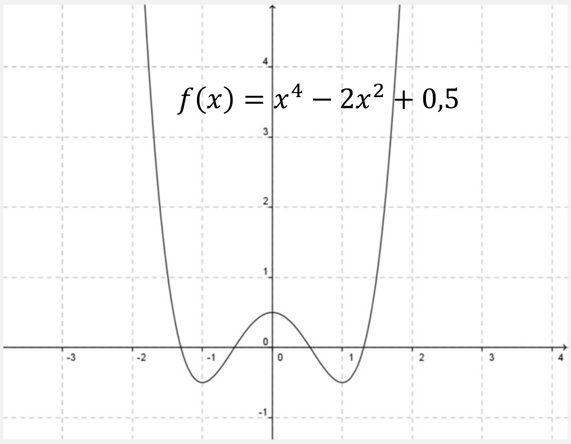
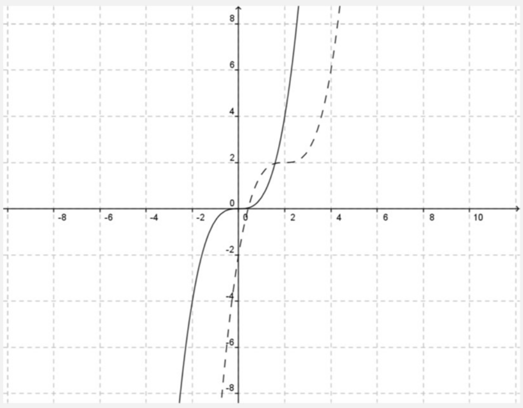
Mathematik-Grundwissen 11

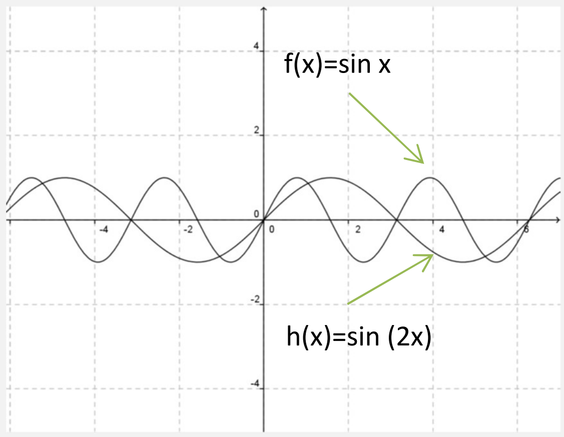
Theorie	Beispiel
Grenzwerte im Unendlichen a ist ein Grenzwert der Funktion f, wenn die Funktionswerte von f für beliebig groß werdende x-Werte der Zahl a beliebig nahe kommen. Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ Eine Funktion, die einen Grenzwert besitzt, bezeichnet man als konvergent, sonst divergent.	
Symmetrie von Funktionsgraphen Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse: $$f(-x) = f(x)$$ Punktsymmetrie bzgl. des Koordinatenursprungs: $$f(-x) = -f(x)$$ Kommen im Funktionsterm nur x-Potenzen mit geraden/ungeraden Exponenten vor, so ist der Graph achsensymmetrisch/ punktsymmetrisch.	
Verschieben von Funktionsgraphen $g(x) = c \cdot f(d \cdot x + a) + b$ bedeutet, dass g aus dem Graphen von f durch Verschiebung um –a in x-Richtung und um b in y-Richtung entsteht.	Beispiel: Verschiebung von links nach rechts um 2 sowie von unten nach oben um 2 Links: $f(x) = x^3$ Rechts: $g(x) = (x-2)^3 + 2$ 

Mathematatik-Grundwissen 11

Strecken von Funktionsgraphen

$g(x) = k \cdot f(x)$ bedeutet, dass g gegenüber f in y-Richtung mit dem Faktor k gestreckt ist.

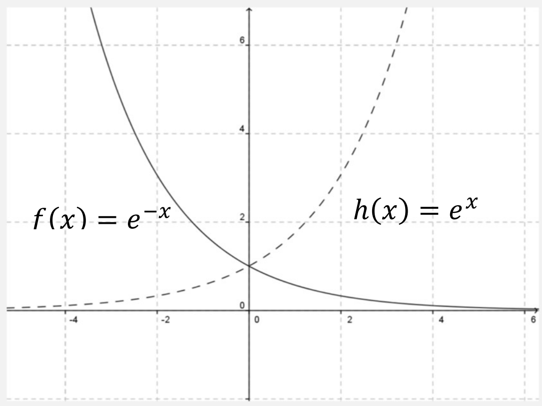
$h(x) = f(k \cdot x)$ bedeutet, dass h gegenüber f in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{k}$ gestreckt ist.



Spiegeln von Funktionsgraphen

$g(x) = -f(x)$ bedeutet, dass g durch Spiegelung an der x-Achse aus f hervorgeht.

$h(x) = f(-x)$ bedeutet, dass h durch Spiegelung an der y-Achse aus f hervorgeht.



Stetigkeit

Ist eine Funktion f auf einem Intervall definiert und kann ihr Graph auf diesem Intervall ohne den Stift abzusetzen durchgezeichnet werden, dann nennt man f auf dem Interfall **stetig**.

Sprungstellen sind Stellen, an denen der Graph **unstetig** ist.

Gebrochen-rationale Funktionen

Eine Funktion heißt gebrochen-rational, wenn man sie in der folgenden Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$

darstellen kann, wobei p(x) das Zählerpolynom und q(x) das Nennerpolynom ist und

q(x) mindestens den Grad 1 hat.

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x(x + 2)}$$

p(x): Zählerpolynom Grad 1

q(x): Nennerpolynom Grad 2

Mathematik-Grundwissen 11

Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen Die **Nullstellen** einer gebrochen-rationalen Funktion f lassen sich durch Lösen der Gleichung p(x) = 0 bestimmen. Die Nullstellen entsprechen den Schnittpunkten mit der x-Achse. Die **Definitionsmenge D** bekommt man mithilfe der Gleichung q(x) = 0. Die Nullstellen des Nenners sind dabei die Definitionslücken. Der **Schnittpunkt S** mit der y-Achse wird berechnet, indem der x-Wert gleich Null gesetzt wird.	$f(x) = \frac{2x-1}{x(x+2)}$ p(x)=0 => x = $\frac{1}{2}$ N($\frac{1}{2}$ I 0) q(x)=0 => D = IR \ {-2;0} S (0 I *f(0)*)
Verhalten für x -> ±∞ bzw. **Verhalten von f an den Rändern von D** 1. **Zählergrad z < Nennergrad n** 2. **Zählergrad z = Nennergrad n** 3. **Zählergrad z > Nennergrad n mit z=n+1** ⇨ **Waagrechte / schräge Asymptote mit** *1.* **y = 0** *2.* **y = a** *3.* **y = mx+t**	*1.* $f(x) = \frac{2}{x+1}$ $z = 0, n = 1 \;=> z < n$ y = 0 ist waagrechte Asymptote G_f konvergiert gegen 0 *2.* $g(x) = \frac{\mathbf{2}x}{\mathbf{1}x+1}$ $z = 1, n = 1 \;=> z = n$ y = a hier: y =2 ist waagrechte Asymptote G_g konvergiert gegen a, a$\epsilon\mathbb{R}$ *3.* $h(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ $z = 2, n = 1 \;=> z > n,$ $z = n + 1$ y=mx+t (Gerade) ist schräge Asymptote G_h divergiert gegen die Gerade, die sich durch Polynomdivision ergibt.
Verhalten in der Umgebung von Polstellen Definitionslücke bei x_0: Gilt für x > x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty$ und für x < x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty$, dann nennt man x_0 eine Polstelle von f und die Gerade mit der Gleichung x = x_0 ist **senkrechte Asymptote** des Graphen von f. **Polstellen mit Vorzeichenwechsel:** Im Nenner des Funktionsterms liegt eine Nullstelle ungerader Ordnung vor. **Polstellen ohne Vorzeichenwechsel:** Im Nenner des Funktionsterms liegt eine Nullstelle gerader Ordnung vor	$f(x) = \frac{2}{x+1}$ $mit\ D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (\frac{2}{x+1}) = -\infty\ und\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (\frac{2}{x+1}) = +\infty$ *x = -1* einfache Nullstelle im Nenner ⇨ ungerader Ordnung ⇨ Pol mit VZW ⇨ Gerade mit x = -1 senkrechte Asymptote $g(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ $mit\ D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{2}{(x+1)^2} = +\infty\ und\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2}{(x+1)^2} = +\infty$ *x = -1* doppelte Nullstelle im Nenner ⇨ gerader Ordnung ⇨ Pol ohne VZW ⇨ Gerade mit x = -1 senkrechte Asymptote

Mathematik-Grundwissen 11

Schnittpunkte von zwei Graphen ermitteln: 1. Gleichsetzen der Funktionsterme 2. Lösen der Gleichung nach x 3. Einsetzen der x—Koordinate des Schnittpunktes in eine der beiden Funktionsterme 4. Berechnen der y-Koordinate **5.** S (x I y)	$f(x) = \frac{2x}{4x+1}$ $und\ g(x) = \frac{2x}{x+1}$ $\frac{2x}{4x+1} = \frac{2x}{x+1} \quad \vert \cdot Nenner$ $2x(x+1) = 2x(4x+1)$ $2x^2 + 2x = 8x^2 + 2x$ $0 = 6x^2$ $x = 0$ Einsetzen in f oder g: $y = 0 \quad => \quad S(0 \mid 0)$
Polynomdivision Mathematisches Rechenverfahren, bei dem ein Polynom durch ein anderes dividiert wird. Besondere Anwendung bei der Bestimmung von schrägen Asymptoten. **Begründung des Verhaltens im Unendlichen** mithilfe geeigneter Termumformungen: Mit der Grenzwertbetrachtung von f(x) erhält man **nicht** die schräge Asymptote.	$f(x) = \frac{(4x^2-7x-10)}{(5x-15)}$ $(4x^2-7x-10):(5x-15) = \underbrace{\frac{4}{5}x + 1}_{y=} + \underbrace{\frac{5}{5x-15}}_{Rest}$ $-(4x^2-12x)$ $\quad (5x-10)$ $\quad -(5x-15)$ $\quad\quad 5$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(4x^2-7x-10)}{(5x-15)}$ $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}(4x-7-\overset{\to 0}{\frac{10}{x}})}{\cancel{x}(5-\underset{\to 0}{\frac{15}{x}})} = \mp\infty$ schräge Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{4}{5}x + 1$ Graph der Funktion f divergiert für x -> ±∞

Mathematatik-Grundwissen 11

Bedingte Wahrscheinlichkeit

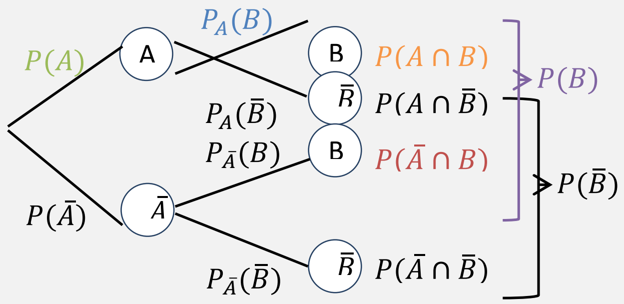
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignis B unter der Bedingung, dass das Ereignis **A bereits eingetreten** ist, nennen wir die

bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}$$

Baumdiagramm und Vierfeldertafel...
..mit Wahrscheinlichkeiten:



	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\bar{B}}$	
$\boldsymbol{A}$	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\boldsymbol{\bar{A}}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	$P(\Omega) = 1$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$,

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P_B(\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(B)}$

...mit absoluten Häufigkeiten (Bsp.):

	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\bar{B}}$	
$\boldsymbol{A}$	$\lvert A \cap B \rvert$	$\lvert A \cap \bar{B} \rvert$	$\lvert A \rvert$
$\boldsymbol{\bar{A}}$	$\lvert \bar{A} \cap B \rvert$	$\lvert \bar{A} \cap \bar{B} \rvert$	$\lvert \bar{A} \rvert$
	$\lvert B \rvert$	$\lvert \bar{B} \rvert$	$\lvert \Omega \rvert$

$P_A(B) = \frac{|A \cap B|}{|A|}$, ...

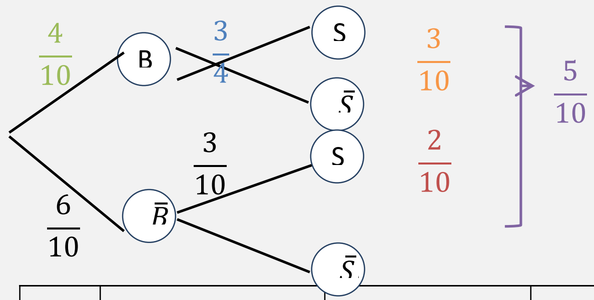
Es gibt in einem Sack zehn Kugeln, die zwei verschiedene Eigenschaften haben:

Muster (mit/ohne Streifen) und Farbe (Blau/Rot)

Vier Kugeln sind blau (B). Drei davon haben Streifen (S). Sechs Kugeln sind rot ($\bar{B}$). Davon sind vier nicht gestreift ($\bar{S}$).
Also sind genau 5 der 10 Kugeln gestreift, es besteht 50% Wahrscheinlichkeit, wenn man irgendeine Kugel zieht, dass diese gestreift ist (P(S)).
Bekommt man aber die Vorinformation, dass die gezogene Kugel blau ist, ändert sich die Wahrscheinlichkeit für Streifen auf der Kugel:

$$P_B(S) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4} = 75\%$$

..mit Wahrscheinlichkeiten:



	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{\bar{S}}$	
$\boldsymbol{B}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
$\boldsymbol{\bar{B}}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$
	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{\bar{S}}$	
$\boldsymbol{B}$	3	1	4
$\boldsymbol{\bar{B}}$	2	4	6
	5	W5	1

$$P_B(S) = \frac{|S \cap B|}{|B|} = \frac{3}{4} = 75\%$$

Mathematik-Grundwissen 11

Formulierungen Unterscheidung zwischen Schnittmenge $P(A \cap B)$ sowie bedingter Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$: A muss **vor** B schon als eingetreten gelten! Wenn beides einfach gleichzeitig eintritt, handelt es sich um die Schnittmenge.	Ereignis S: Sportler Ereignis G: Gamer „Eine **zufällig ausgewählte** Person ist Gamerin, die Sport treibt“ → $P(S \cap G)$ „Die Wahrscheinlichkeit, dass ein **Gamer** (auch) Sport treibt“ → $P_G(S)$

Mathematik-Grundwissen 11

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B nennen wir **stochastisch unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$$

Sonst nennen wir A und B **stochastisch abhängig**.
Die Gleichung oben gilt genau dann, wenn gilt:

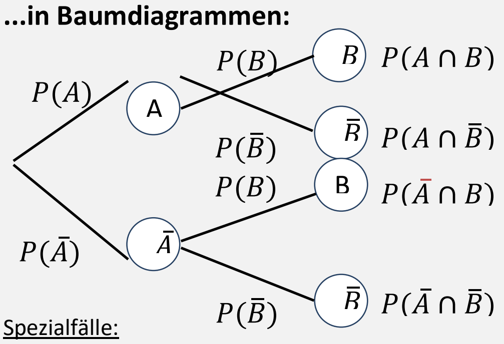
$$P_A(B)=P(B) \quad \text{und} \quad P_B(A)=P(A)$$

Also kann jede der Gleichungen genutzt werden, um stochastische (Un-)Abhängigkeit zu prüfen.

Bei <u>stochastisch unabhängigen</u> Ereignissen A und B...
...in Vierfeldertafeln:

	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\bar{B}}$	
$\boldsymbol{A}$	$P(A)\cdot P(B)$	$P(A)\cdot P(\bar{B})$	$P(A)$
$\boldsymbol{\bar{A}}$	$P(\bar{A})\cdot P(B)$	$P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

...in Baumdiagrammen:



<u>Spezialfälle:</u>
$\boldsymbol{P(A)=0}$**:**
$P_A(B)$ nicht definiert, aber: $P(A)\cdot P(B)=0\cdot P(B)=0$ und $P(A\cap B)=0$
⇒ A und B stochastisch **<u>un</u>**abhängig

$\boldsymbol{P(A)=1}$**:**
$P(A)\cdot P(B)=1\cdot P(B)=P(B)$ und $P(A\cap B)=P(B)$
⇒ A und B stochastisch **<u>un</u>**abhängig

$\boldsymbol{P(A\cap B)=0}$ **und** $\boldsymbol{P(A)\neq 0\neq P(B)}$:
$P(A)\cdot P(B)\neq 0=P(A\cap B)$
⇒ A und B stochastisch **<u>ab</u>**hängig

<u>Stochastische Unabhängigkeit prüfen:</u>
Es gibt 100 Kugeln. Davon sind 30 blau (B).
50 der 100 Kufeln sind gestreift (S). Es gibt 10 gestreifte, blaue Kugeln ($B\cap S$).

$$P(B\cap S)=\frac{10}{100}$$
$$P(B)\cdot P(S)=\frac{30}{100}\cdot\frac{50}{100}=\frac{15}{100}$$

also: $P(B\cap S)\neq P(B)\cdot P(S)$
Die Ereignisse B und S sind stochastisch abhängig voneinander, da die Wahrscheinlichkeiten ungleich sind.

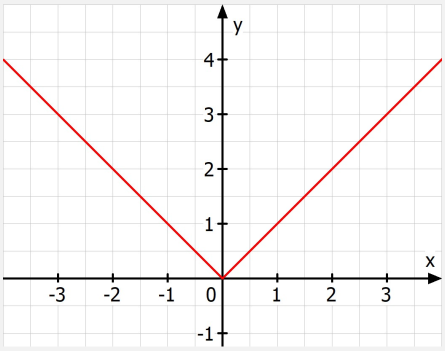
<u>Stochastische Unabhängigkeit gegeben:</u>
Bei der Fertigung eines Bauteils treten unabhängig voneinander die Fehler A und B auf. A tritt mit Wahrscheinlichkeit 10% auf, A und B gemeinsam mit 5%.
Wahrscheinlichkeit für B:

$$P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}05}{0{,}1}=\frac{1}{2}=50\%$$

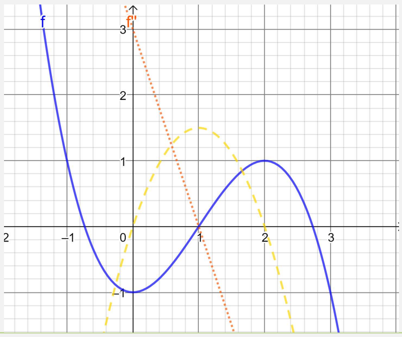
Wahrscheinlichkeit für keine Fehler:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-P(A))\cdot\big(1-P(B)\big)$$
$$(1-0{,}1)\cdot(1-0{,}05)=0{,}9\cdot 0{,}95=0{,}855=85{,}5\%$$

Mathematik-Grundwissen 11

Lokale und mittlere Änderungsrate Ist die Funktion f auf einem Intervall [a; b] definiert, so heißt der Quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ **Differenzenquotient** und sein Wert **mittlere Änderungsrate**. Er gibt die <u>durchschnittliche</u> Änderung von f(x) pro „Zeitabschnitt" $b-a$ an. Die **lokale Änderungsrate** (**Ableitung, Differentialquotient**) ist die <u>momentane</u> Änderungsrate an einer bestimmten Stelle. Sie ist die <u>Steigung der Tangenten</u> an der Stelle x_0. $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$f(x) = 0{,}5x^2 + 1$ Mittlere Änderungsrate im Intervall [0; 3]: $\overline{m} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{5{,}5-1}{3}$=1,5 Lokale Änderungsrate an der Stelle $x_0 = 2$: $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ $= \lim\limits_{x \to h} \frac{0{,}5(2+h)^2+1-f(2)}{h}$ $= \lim\limits_{x \to h} \frac{0{,}5(4+4h+h^2)+1-3}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2$
Differenzierbarkeit Die Tangentensteigung an einer Stelle kann nicht bestimmt werden, wenn der Graph nicht „glatt" verläuft, d.h. wenn er dort einen Knick oder eine Sprungstelle hat. Die Funktion heißt an dieser Stelle nicht differenzierbar.	Betragsfunktion: $f(x) = \lvert x \rvert = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$ nicht differenzierbar bei $x = 0$ 
Tangentengleichung und Steigungswinkel Die **Tangentengleichung** der Form $y = mx + t$ der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \vert f(x_0))$ bestimmt man durch folgende Schritte: 1. Steigung m berechnen mit $m = f'(x_0)$. 2. m und P in Geradengleichung einsetzen und nach t auflösen. 3. Angeben der Tangentengleichung Für den **Steigungswinkel** α dieser Tangente gilt: $\tan\alpha = f'(x_0)$.	$f(x) = -0{,}5x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ Punkt $P(-1 \vert 1)$ $f'(x) = -1{,}5x^2 + 3x = 3x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ $m = f'(-1) = -4{,}5$ $1 = -4{,}5 \cdot (-1) + t \quad \Rightarrow \quad t = -3{,}5$ $y = -4{,}5x - 3{,}5$ $\tan\alpha = -4{,}5 \Rightarrow \alpha \approx -77{,}5°$

Mathematik-Grundwissen 11

Erste Ableitung und Monotonie Die Funktion f heißt **streng monoton zunehmend (steigend)** bzw. **abnehmend (fallend)** in einem Intervall I der Definitionsmenge, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ **Monotoniekriterium**: Wenn für alle $x \in \mathrm{I}$ gilt: $f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton zunehmend in I, $f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton abnehmend in I.	$f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ $f'(x) > 0$ für $0 < x < 2$, also f str. m. zunehmend in $[0; 2]$ $f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $x > 2$, also f str. m. abnehmend in $]-\infty; 0]$ und $[2; +\infty[$ 
Extremwerte Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum,** wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' bei x_0 einen VZW von + nach – hat oder wenn $f'(x_0) = 0$ ist und $f''(x_0) < 0$ gilt. Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum,** wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' bei x_0 einen VZW von – nach + hat oder wenn $f'(x_0) = 0$ ist und $f''(x_0) > 0$ gilt.	$f'(0) = 0$ und VZW von - nach + $\Rightarrow T(0 \| -1)$ **Tiefpunkt** $f'(2) = 0$ und VZW von + nach - $\Rightarrow H(2 \| 1)$ **Hochpunkt** alternativ mit 2. Ableitung: $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0 \Rightarrow T(0 \| -1)$ $f'(2) = 0$ und $f''(2) < 0 \Rightarrow H(2 \| 1)$
Zweite Ableitung, Krümmung, Wendestellen Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathrm{I}$, so ist $f'(x)$ streng monoton zunehmend in I und der Graph von f **linksgekrümmt** in I. Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in \mathrm{I}$, so ist $f'(x)$ streng monoton abnehmend in I und der Graph von f **rechtsgekrümmt** in I. Die Funktion f hat an der Stelle x_0 eine **Wendestelle**, wenn $f''(x_0) = 0$ ist und f'' bei x_0 einen VZW hat oder wenn $f''(x_0) = 0$ ist und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt. Der Punkt $W(x_0 \| f(x_0))$ ist dann ein **Wendepunkt** von G_f. Die Tangente an G_f im Wendepunkt heißt **Wendetangente**. Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente ist ein **Terrassenpunkt**. also: Notwendiges Kriterium für einen Terrassenpunkt: $f'(x_0) = 0$ Hinreichendes Kriterium: $f''(x_0) = 0$ ist und $f'''(x_0) \neq 0$	$f''(x) = -3x + 3 = -3(x - 1)$ $\Rightarrow f''(x) = 0$ für $x_3 = 1$. $f''(x) > 0$ für $x < 1$, d.h. G_f ist in $]-\infty; 1]$ linksgekrümmt. $f''(x) < 0$ für $x > 1$, d.h. G_f ist in $[1; +\infty[$ rechtsgekrümmt. f hat einen Wendepunkt bei $W(1 \| 0)$.

Mathematik-Grundwissen 11

Das Newton-Verfahren Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen bei einer differenzierbaren Funktion f. Man beginnt mit einem geeigneten Näherungswert x_0 als Startwert und berechnet mit der folgenden **Iterationsvorschrift** die weiteren Näherungswerte für die Nullstelle von f: $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $f'(x_n) \neq 0$.	$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ Startwert: $x_0 = 1$ $x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{\frac{7}{6}}{-\frac{3}{2}} = \frac{16}{9}$

Empfehlenswerte Internet-Links mit Aufgaben und Erklärungen:

www.strobl-f.de

www.zum.de/mathematik-digital

www.smart.uni-bayreuth.de

www.mathegym.de