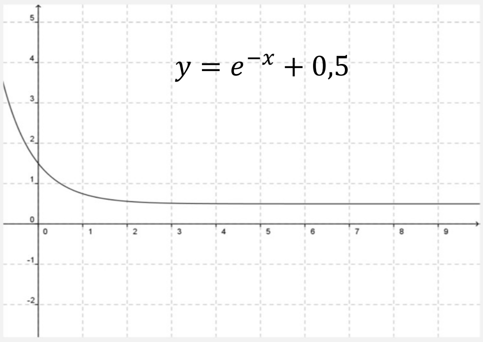
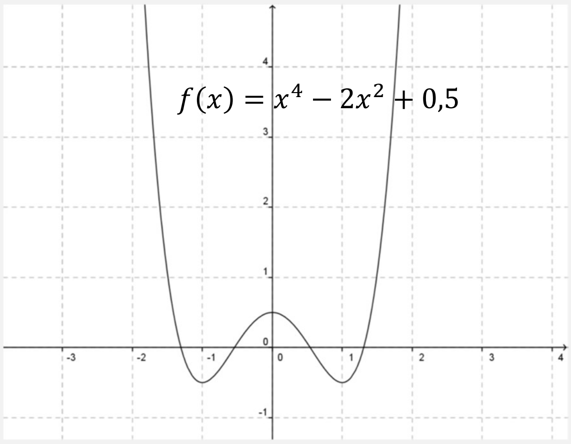
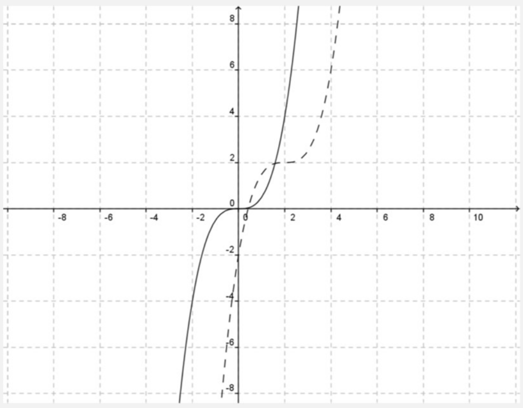
Mathematatik-Grundwissen 11

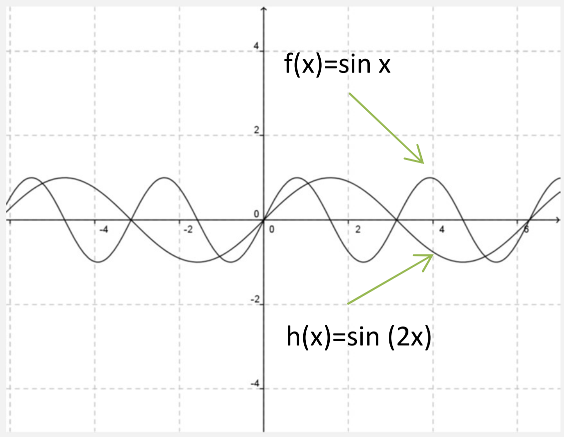
Theorie	Beispiel
Grenzwerte im Unendlichen a ist ein Grenzwert der Funktion f, wenn die Funktionswerte von f für beliebig groß werdende x-Werte der Zahl a beliebig nahe kommen. Schreibweise: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ Eine Funktion, die einen Grenzwert besitzt, bezeichnet man als konvergent, sonst divergent.	
Symmetrie von Funktionsgraphen Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse: $$f(-x) = f(x)$$ Punktsymmetrie bzgl. des Koordinatenursprungs: $$f(-x) = -f(x)$$ Kommen im Funktionsterm nur x-Potenzen mit geraden/ungeraden Exponenten vor, so ist der Graph achsensymmetrisch/ punktsymmetrisch.	
Verschieben von Funktionsgraphen $g(x) = c \cdot f(d \cdot x + a) + b$ bedeutet, dass g aus dem Graphen von f durch Verschiebung um –a in x-Richtung und um b in y-Richtung entsteht.	Beispiel: Verschiebung von links nach rechts um 2 sowie von unten nach oben um 2 Links: $f(x) = x^3$ Rechts: $g(x) = (x-2)^3 + 2$ 

Mathematik-Grundwissen 11

Strecken von Funktionsgraphen

$g(x) = k \cdot f(x)$ bedeutet, dass g gegenüber f in y-Richtung mit dem Faktor k gestreckt ist.

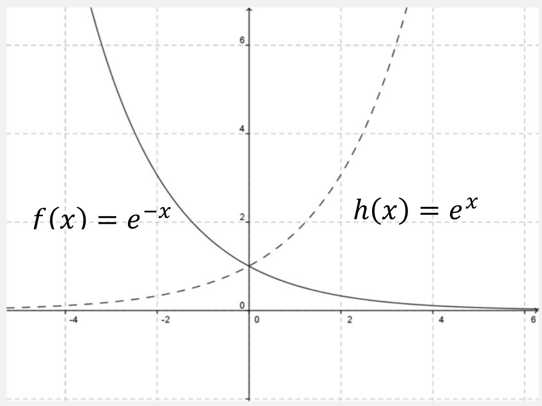
$h(x) = f(k \cdot x)$ bedeutet, dass h gegenüber f in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{k}$ gestreckt ist.



Spiegeln von Funktionsgraphen

$g(x) = -f(x)$ bedeutet, dass g durch Spiegelung an der x-Achse aus f hervorgeht.

$h(x) = f(-x)$ bedeutet, dass h durch Spiegelung an der y-Achse aus f hervorgeht.



Stetigkeit

Ist eine Funktion f auf einem Intervall definiert und kann ihr Graph auf diesem Intervall ohne den Stift abzusetzen durchgezeichnet werden, dann nennt man f auf dem Interfall **stetig**.

Sprungstellen sind Stellen, an denen der Graph **unstetig** ist.

Gebrochen-rationale Funktionen

Eine Funktion heißt gebrochen-rational, wenn man sie in der folgenden Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$

darstellen kann, wobei p(x) das Zählerpolynom und q(x) das Nennerpolynom ist und

q(x) mindestens den Grad 1 hat.

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x+2)}$$

p(x): Zählerpolynom Grad 1

q(x): Nennerpolynom Grad 2

Mathematik-Grundwissen 11

<table>
<tr>
<td>

Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen

Die **Nullstellen** einer gebrochen-rationalen Funktion f lassen sich durch Lösen der Gleichung p(x) = 0 bestimmen. Die Nullstellen entsprechen den Schnittpunkten mit der x-Achse.

Die **Definitionsmenge D** bekommt man mithilfe der Gleichung q(x) = 0. Die Nullstellen des Nenners sind dabei die Definitionslücken.

Der **Schnittpunkt S** mit der y-Achse wird berechnet, indem der x-Wert gleich Null gesetzt wird.

</td>
<td>

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x+2)}$$

p(x)=0 => x = $\frac{1}{2}$ N($\frac{1}{2}$ I 0)

q(x)=0 => D = IR \ {-2;0}

S (0 I *f(0)*)

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Verhalten für x -> ±∞ bzw.
Verhalten von f an den Rändern von D

1. **Zählergrad z < Nennergrad n**
2. **Zählergrad z = Nennergrad n**
3. **Zählergrad z > Nennergrad n mit z=n+1**

⇨ **Waagrechte / schräge Asymptote mit**

1. **y = 0**
2. **y = a**
3. **y = mx+t**

</td>
<td>

1. $f(x) = \frac{2}{x+1}$ $z = 0, n = 1 \;\; => z < n$
   y = 0 ist waagrechte Asymptote
   G_f konvergiert gegen 0
2. $g(x) = \frac{\mathbf{2}x}{\mathbf{1}x+1}$ $z = 1, n = 1 \;\; => z = n$
   y = a hier: y =2 ist waagrechte Asymptote
   G_g konvergiert gegen a, a$\in\mathbb{R}$
3. $h(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ $z = 2, n = 1 \;\; => z > n,$ $z = n + 1$
   y=mx+t (Gerade) ist schräge Asymptote
   G_h divergiert gegen die Gerade, die sich durch Polynomdivision ergibt.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Verhalten in der Umgebung von Polstellen

Definitionslücke bei x_0:
Gilt für x > x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty$ und

für x < x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty$,

dann nennt man x_0 eine Polstelle von f und die Gerade mit der Gleichung x = x_0 ist **senkrechte Asymptote** des Graphen von f.

Polstellen mit Vorzeichenwechsel:
Im Nenner des Funktionsterms liegt eine Nullstelle ungerader Ordnung vor.

Polstellen ohne Vorzeichenwechsel:
Im Nenner des Funktionsterms liegt eine Nullstelle gerader Ordnung vor

</td>
<td>

$$f(x) = \frac{2}{x+1} \;\; mit\; D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (\frac{2}{x+1}) = -\infty \; und \; \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (\frac{2}{x+1}) = +\infty$

x = -1 einfache Nullstelle im Nenner

⇨ ungerader Ordnung
⇨ Pol mit VZW
⇨ Gerade mit x = -1 senkrechte Asymptote

$$g(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \;\; mit\; D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{2}{(x+1)^2} = +\infty \; und \; \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{2}{(x+1)^2} = +\infty$

x = -1 doppelte Nullstelle im Nenner

⇨ gerader Ordnung
⇨ Pol ohne VZW
⇨ Gerade mit x = -1 senkrechte Asymptote

</td>
</tr>
</table>

Mathematik-Grundwissen 11

Schnittpunkte von zwei Graphen ermitteln: 1. Gleichsetzen der Funktionsterme 2. Lösen der Gleichung nach x 3. Einsetzen der x—Koordinate des Schnittpunktes in eine der beiden Funktionsterme 4. Berechnen der y-Koordinate **5.** S (x I y)	$f(x) = \frac{2x}{4x+1}$ $und\ g(x) = \frac{2x}{x+1}$ $\frac{2x}{4x+1} = \frac{2x}{x+1} \quad \lvert\cdot Nenner$ $2x(x+1) = 2x(4x+1)$ $2x^2 + 2x = 8x^2 + 2x$ $0 = 6x^2$ $x = 0$ Einsetzen in f oder g: $y = 0$ $=>$ $S(0 \mid 0)$
Polynomdivision Mathematisches Rechenverfahren, bei dem ein Polynom durch ein anderes dividiert wird. Besondere Anwendung bei der Bestimmung von schrägen Asymptoten. **Begründung des Verhaltens im Unendlichen** mithilfe geeigneter Termumformungen: Mit der Grenzwertbetrachtung von f(x) erhält man **nicht** die schräge Asymptote.	$f(x) = \frac{(4x^2-7x-10)}{(5x-15)}$ $(4x^2-7x-10):(5x-15) = \underbrace{\frac{4}{5}x+1}_{y=} \underbrace{-\frac{5}{5x-15}}_{Rest}$ $-(4x^2-12x)$ $(5x-10)$ $-(5x-15)$ 5 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(4x^2-7x-10)}{(5x-15)}$ $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}(4x-7-\overset{\to 0}{\cancel{\frac{10}{x}}})}{\cancel{x}(5-\underset{\to 0}{\cancel{\frac{15}{x}}})} = \mp\infty$ schräge Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{4}{5}x + 1$ Graph der Funktion f divergiert für x -> ±∞

Empfehlenswerte Internet-Links mit Aufgaben und Erklärungen:

www.strobl-f.de

www.zum.de/mathematik-digital

www.smart.uni-bayreuth.de

www.mathegym.de