NKG Weißenhorn Grundwissen Mathematik 10 Klasse (G9)

THEORIE	BEISPIEL

Lineares Wachstum

Ein Wachstum mit konstantem Zuwachs d in gleichen Zeitschritten heißt lineares Wachstum.

$$d = B(t+1) - B(t)$$

d ist die **absolute Änderung** pro Zeitschritt.

Es gilt:
$B(t) = B(0) + t \cdot d$;
$B(0)$ ist der Anfangsbestand, t die Zeit.

Lineares Wachstum mit der absoluten Änderung $d = 4 \; und \; f(0) = 3$:

t	0	1	2	3
$f(t)$	3	7	11	15

$f(t) = f(t-1) + 4$;
$f(t) = 3 + 4t$;

Exponentielles Wachstum

Ein Wachstum mit konstantem **Wachstumsfaktor a** heißt exponentielles Wachstum.

$$a = \frac{B(t+1)}{B(t)}$$

$p = a - 1$ bezeichnet die relative (prozentuale) Änderung p pro Zeitschritt.

Es gilt:
$B(t) = B(0) \cdot a^t$
$B(0)$ ist der Anfangsbestand, t die Zeit.

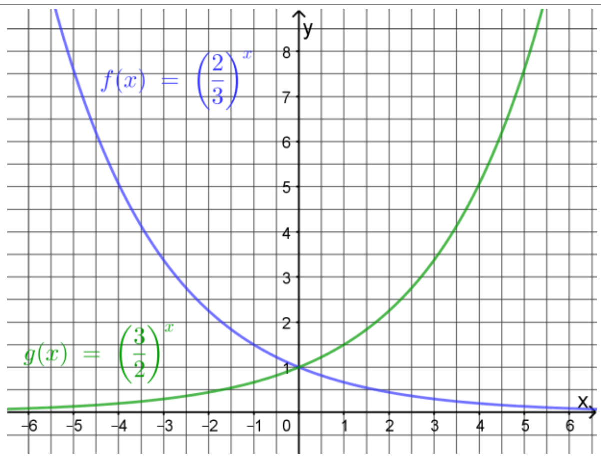
Exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor $a = 1{,}5$ und $f(0) = 4$

t	0	1	2	3
$f(t)$	4	6	9	13,5

$f(t+1) = f(t) \cdot 1{,}5$
$f(t) = 4 \cdot 1{,}5^t$

Exponentialfunktionen

$f: x \mapsto b \cdot a^x$; a > 0; $a \neq 1$ und b > 0 nennt man Exponentialfunktion.
Die Funktionswerte sind immer positiv.
Der Graph geht durch den Punkt (0|b).
Die x-Achse ist Asymptote.
Der Graph von $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ geht aus dem Graph von $x \mapsto a^x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.



Logarithmen

Die Lösung der Exponentialgleichung $a^x = b$ (für a > 0, b > 0) ist der Logarithmus von b zur Basis a: $\quad x = \log_a(b)$

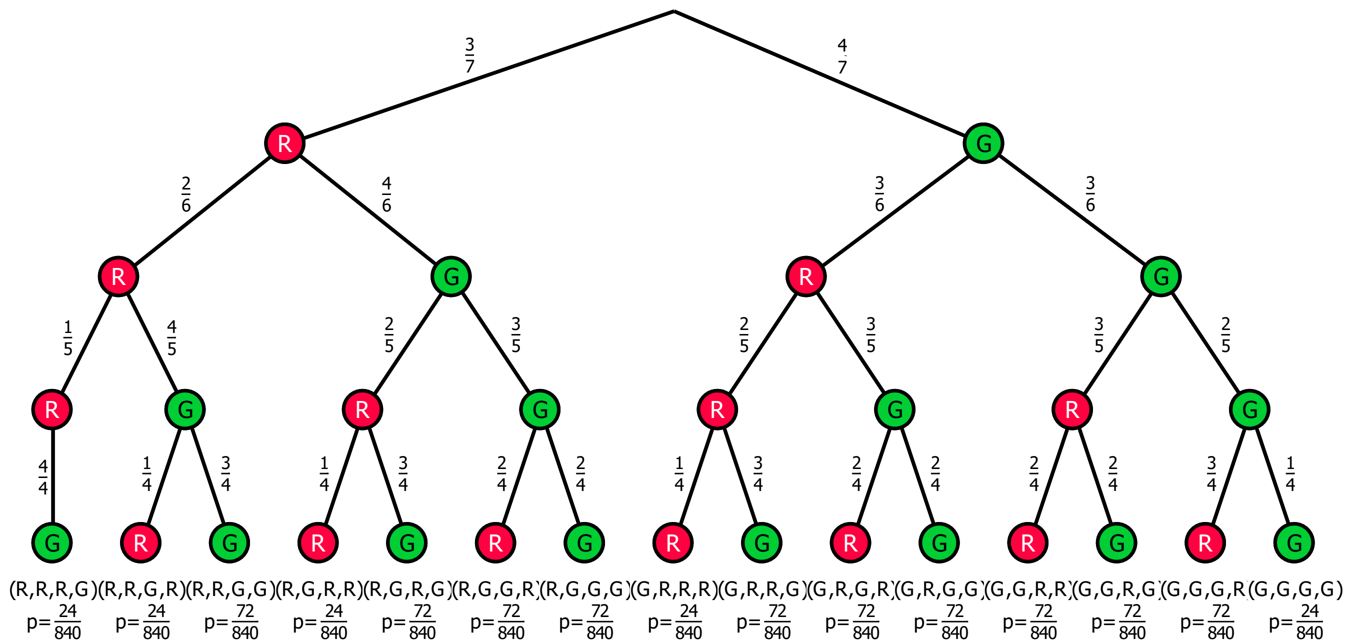
$\log_3(243) = 5$
denn: $3^5 = 243$

Rechengesetz

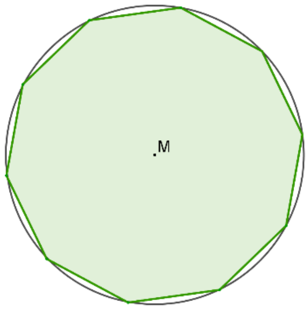
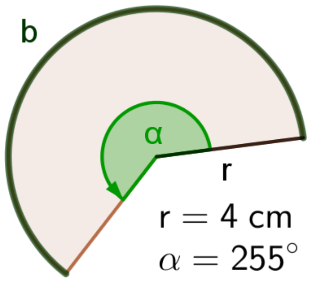
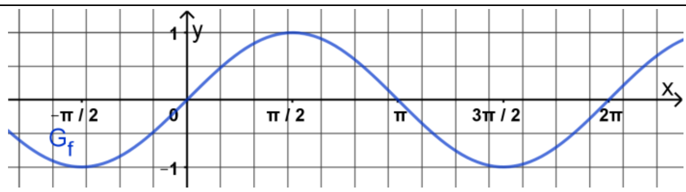
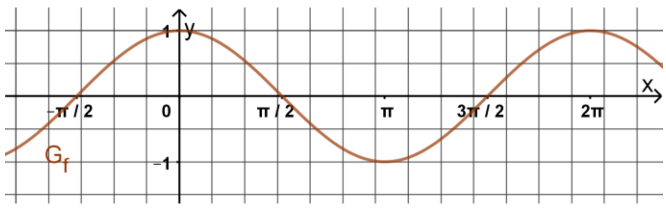
$\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$
für $a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$.

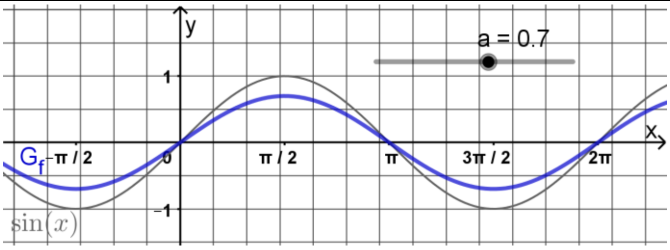
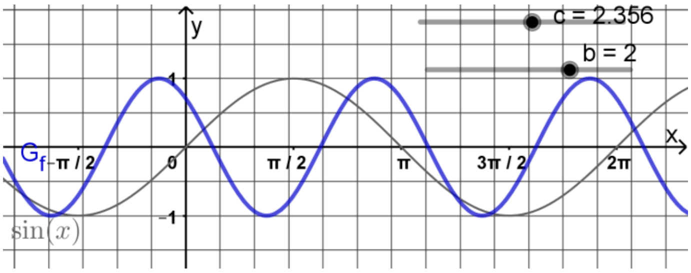
$\log_3(5^2) = 2 \cdot \log_3(5) = 2 \cdot 1{,}46$

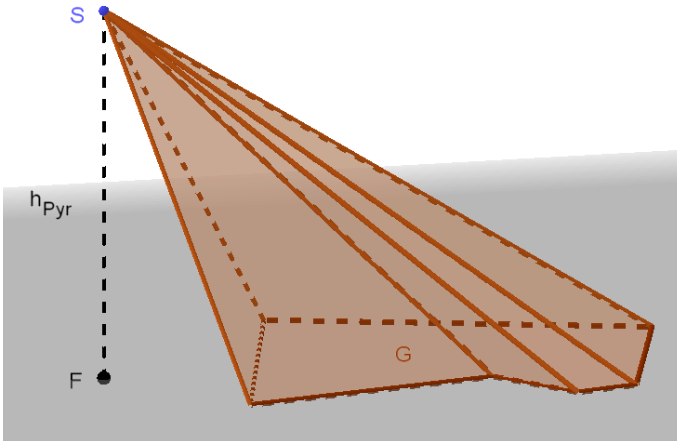
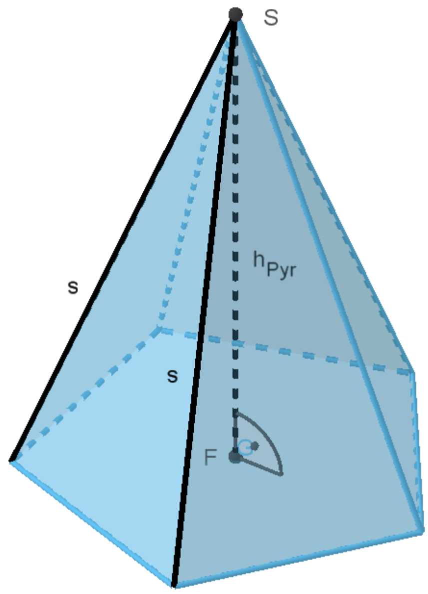
THEORIE	BEISPIEL
Lösen von Exponentialgleichungen Zum Lösen von Exponentialgleichungen (x ist im Exponenten) verwendet man den Logarithmus.	$1{,}7^{x+3} = 500 \quad \vert \log_{1,7}$ $\log_{1,7}(1{,}7^{x+3}) = \log_{1,7}(500)$ $(x+3)\cdot\log_{1,7}(1{,}7) = \log_{1,7}(500)$ $x+3 = \log_{1,7}(500) \quad \vert -3$ $x = \log_{1,7}(500) - 3$ $x = 8{,}71$
Mehrstufige Zufallsexperimente **1. Pfadregel** Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.	Aufgabe Urne: *a) Aus einer Urne mit 3 roten und 4 grünen Kugeln werden nacheinander vier Kugeln gezogen. Zeichne ein Baumdiagramm und gib alle zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.*
2. Pfadregel Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse addiert, welche zu dem Ereignis gehören.	*b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei genau eine grüne Kugel (Ereignis A) zu ziehen.* P(A) = P((RRRG)) + P((RRGR))+ P((RGRR))+ P((GRRR)) = $4\cdot\frac{24}{840} = \frac{4}{35} = 11{,}42\ \%$



Baumdiagramm zur Aufgabe Urne.

THEORIE	BEISPIEL
Die Kreiszahl π π ist eine irrationale Zahl. Man kann durch verschiedene Verfahren Näherungswerte bestimmen. Beispielsweise lässt sich der Wert des Kreisumfangs durch Berechnung des Umfangs von Vielecken einschachteln und damit π angeben.	 π = 3,1415926535897…
Kreissektor Kreissektor mit Radius r und Mittelpunktswinkel α: Länge $\boldsymbol{b}$ des Kreisbogens: $\boldsymbol{b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r}$ Flächeninhalt $\boldsymbol{A}$ des Kreissektors: $\boldsymbol{A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} br}$	 $b = \frac{255°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4\,cm$ $\approx 17{,}8\,cm$ $A = \frac{255°}{360°} \cdot \pi \cdot 16\,cm^2$ $\approx 35{,}6\,cm^2$
Bogenmaß x und Gradmaß α Der Winkel α wird vom Gradmaß ins Bogenmaß x umgerechnet mit der Formel: $\boldsymbol{x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi}$ und $\boldsymbol{\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°}$ denn: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{x}{2\pi}$	2π entspricht 360° bzw. π entspricht 180°. α = 60° im Bogenmaß: $x = \frac{60°}{180°} \cdot \pi \approx 1{,}05$ x = 0,52 im Gradmaß: $\alpha = \frac{0{,}52}{\pi} \cdot 180° \approx 29{,}8$
Die trigonometrischen Funktionen Die Funktion $f\colon x \mapsto sin(x);\ x \in \mathbb{R}$ heißt **Sinusfunktion**. Ihre Wertemenge ist $[-1;\ 1]$; f ist periodisch mit Periodenlänge 2π. x ist das Bogenmaß des Winkels. Die Funktion $f\colon x \mapsto cos(x);\ x \in \mathbb{R}$ heißt **Kosinusfunktion**. Ihre Wertemenge ist $[-1;\ 1]$; f ist periodisch mit Periodenlänge 2π.	 *Graph der Sinusfunktion*  *Graph der Kosinusfunktion*

THEORIE	BEISPIEL
Allgemeine Sinusfunktion $f: x \mapsto a \cdot \sin(bx + c) + d$ $= a \cdot sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right] + d;$ mit $x \in \mathbb{R};\ a \neq 1;\ b\ > 0$; Dabei beschreibt **a** eine Streckung mit dem Faktor |a| in y-Richtung. **b** eine Streckung mit dem Faktor |b| in x-Richtung. $\frac{c}{b}$ eine Verschiebung um $-\frac{c}{b}$ in x-Richtung und **d** eine Verschiebung um d in y-Richtung. Die Periodenlänge ist $\frac{2\pi}{b}$. Falls $a < 0$ ist, kommt eine Spiegelung an der x-Achse hinzu.	 Graph von $f(x) = 0{,}7 \cdot sin(x)$  Graph von $f(x) = si\,n(2x + 0{,}75\pi)$
Polynome Polynom: Term aus Summen von gleichen Variablen mit zugehörigen Koeffizienten. Der höchste Exponent heißt Grad des Polynoms. Allgemeine Schreibweise: $a_n x^n +\ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0;$ $x \in \mathbb{R}$; mit den Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R};\ a_n \neq 0;$	Polynom: $2x^7 - 0{,}15x^4 + x^2 - 3$ Koeffizienten: $a_7 = 2;\ a_6 = a_5 = 0;\ a_4 = -0{,}15;\ a_3 = 0;$ $a_2 = 1;\ a_1 = 0;\ a_0 = -3$ Grad des Polynoms: 7
Ganzrationale Funktionen Eine Funktion mit einem Polynom als Funktionsterm heißt ganzrationale Funktion. Der Summand mit dem höchsten vorkommenden Exponenten bestimmt das Verhalten einer ganzrationalen Funktion für große x.	$f(x) = -4x^3 - 4x^2 + x + 1$; ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Für sehr große x ist $-4x^3$ sehr klein, also geht $f(x)$ nach rechts unten.
Nullstellen und deren Vielfachheit Im faktorisierten Term der Funktion ist die Vielfachheit der Nullstelle die Anzahl, wie oft der zur Nullstelle gehörende Faktor vorkommt. Bei **ungerader Vielfachheit** hat die Funktion eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW), bei **gerader Vielfachheit** ohne Vorzeichenwechsel.	$g(x) = -4(x+2)^3(x-1)^2x$ hat die dreifache Nst. x = - 2 (mit VZW) die doppelte Nst. x = 1 (ohne VZW) und die einfache Nst. x = 0 (mit VZW).

THEORIE	BEISPIEL
Symmetrie Der Graph einer Funktion f ist genau dann a) **achsensymmetrisch** zur y-Achse wenn gilt: $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}$. Die Funktion heißt dann gerade. b) **punktsymmetrisch** zum Ursprung wenn gilt: $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ für alle $x \in \mathbb{D}$. Die Funktion heißt dann ungerade. Die ganzrationalen Funktionen mit ausschließlich geraden Exponenten sind achsensymmetrisch. Die ganzrationalen Funktionen mit ausschließlich ungeraden Exponenten sind punktsymmetrisch.	a) Es ist $cos(-x) = \cos(x)$ somit ist die Kosinusfunktion achsensymmetrisch. punktsymmetrisch, b) Es ist $sin(-x) = -\sin(x)$ somit ist die Sinusfunktion punktsymmetrisch, $f(x) = -3x^6 - x^2 + 1$ ist achsensymmetrisch, $g(x) = -4x^3 - 4x^7 + x$ ist punktsymmetrisch,
Pyramide und Kegel Verbindet man die Eckpunkte eines Vielecks G mit einem Punkt S außerhalb der Vielecksebene, so entsteht eine **Pyramide** mit Spitze S und Grundfläche G. **Höhe h der Pyramide**: Abstand der Spitze S von der Grundfläche. **Gerade Pyramide**: alle Seitenkanten sind gleich lang (somit symmetrisches Vieleck) analog Kegel: Verbindet man die Eckpunkte eines Kreises G mit einem Punkt S außerhalb der Kreisebene, so entsteht ein **Kegel** mit Spitze S und Grundfläche G. **Höhe h des Kegels**: Abstand der Spitze S von der Grundfläche. **Gerader Kegel**: Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises.	 *Schiefe sechsseitige Pyramide mit Höhe*  *Gerade fünfseitige Pyramide*

<table>
<tr><th>THEORIE</th><th>BEISPIEL</th></tr>
<tr><td>

Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden

Es gilt O = G + M (Grundfläche + Mantelfläche)
Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat das Volumen:

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

</td><td></td></tr>
<tr><td>

Oberflächeninhalt und Volumen von geraden Kegeln.

Ein gerader Kegel mit Grundfläche G, dem Radius r, der Höhe h und der Mantellinie m hat:

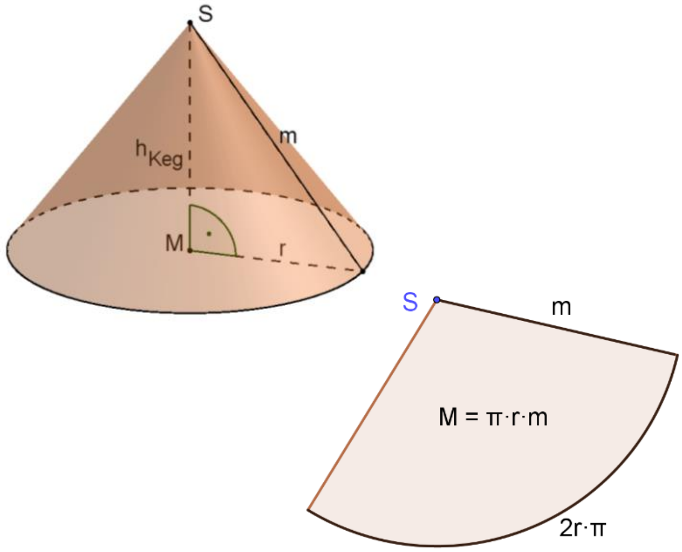
Volumen: $V_{Keg.} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

Inh. d. Mantelfläche: $M_{Keg.} = \pi r m$

(Die Mantelfläche ist ein Kreissektor)

Oberflächeninhalt: $O = G + M = \pi r^2 + \pi r m$

</td><td>



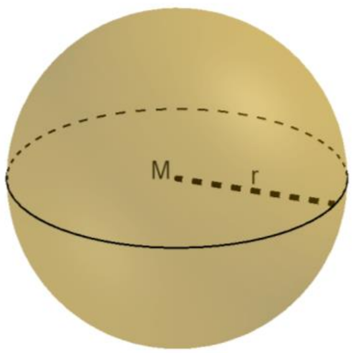
</td></tr>
<tr><td>

Volumen und Oberflächeninhalt der Kugel

$$V_{Ku} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$O_{Ku} = 4\pi r^2$$

</td><td>



</td></tr>
</table>

erstellt von H. Köhler, November 2023

Empfehlenswerte Internet-Links

Hier findest du weitere Aufgaben und Erklärungen:

www.strobl-f.de
www.zum.de/mathematik-digital
www.smart.uni-bayreuth.de
www.mathegym.de