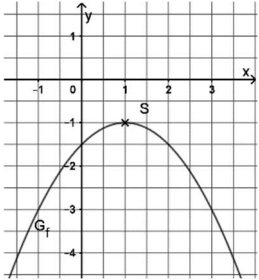
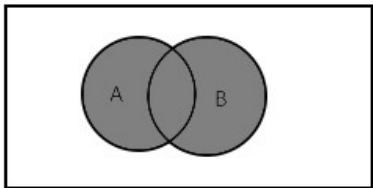
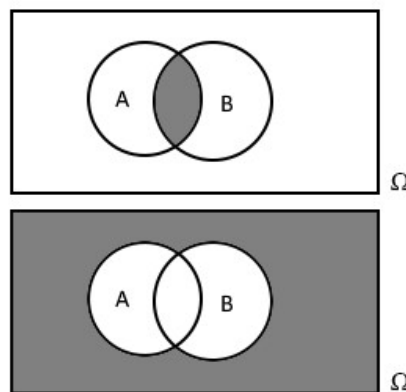


Mathematik Grundwissen Kl. 9 - G9

Wissen und Können	Beispiele
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ - Irrationale Zahlen (unendliche, nichtperiodische Dezimalbruchdarstellung) gehören nicht zu $\mathbb{Q}$. - Es gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ Quadratwurzeln $\sqrt{a}$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. $\sqrt{a}$ heißt Quadratwurzel; a heißt Radikand: $(\sqrt{a})^2 = a$ - Rechengesetze für Quadratwurzeln: - Betragsregel: $\sqrt{a^2} = a$ - Multiplikationsregel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ - Divisionsregel: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ - Teilweises Radizieren $\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$	irrat. Zahlen: z.B. 1,23456789101...; $\pi = 3,1415...$ $\pi \notin \mathbb{Q}$; $1,32 \notin \mathbb{Z}$; $-7 \notin \mathbb{N}$ $\sqrt{2,25} = 1,5$; denn $(1,5)^2 = 2,25$ und $(\sqrt{2,25})^2 = 2,25$ a) $\sqrt{(-5)^2} = -5$ b) $\sqrt{7a} \sqrt{7a^3} = \sqrt{49a^4} = 7a^2$ c) $\frac{\sqrt{12a^3}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{12a^3}{3a}} = \sqrt{4a^2} = 2 a$ d) $\sqrt{50a^3 b^2} = \sqrt{5^2 a^2 b^2 2a} = 5 ab \sqrt{2a}$
Quadratische Funktionen und ihre Graphen $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ - Die Graphen von quadratischen Funktionen sind Parabeln - Term der Normalparabel: $f(x) = x^2$ - Öffnung der Parabel: $\begin{cases} a > 0: \text{nach oben geöffnet} \\ a < 0: \text{nach unten geöffnet} \end{cases}$ - Weite der Parabel: • $a > 1$: schmaler als Normalparabel • $a < 1$: breiter als Normalparabel - Scheitelform: • $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \Leftrightarrow S(x_s y_s)$	Aussagen über den Graphen der Parabel f mit $f: x \mapsto -0,5x^2 + x - 1,5$ $a < 0$: Parabel nach unten geöffnet ($a = -0,5$) $a < 1$: Parabel weiter als die Normalparabel ($a = 0,5$) Scheitelform: $f(x) = -0,5(x - 1)^2 - 1$ $S(1 -1)$ 
Quadratische Ergänzung: Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung kann man den Term einer quadratischen Funktion so umformen, dass man den Scheitel der zugehörigen Parabel ablesen kann. 1.) Den Faktor a vor x^2 ausklammern 2.) Die Hälfte der Zahl vor dem x quadratisch ergänzen: 3.) Die ersten 3 Summanden einklammern. 4.) Binomische Formel und Zahlen umformen. 5.) Den Faktor a wieder reinmultiplizieren 6.) Den Scheitel ablesen	Beispiel: $f(x) = -0,5x^2 + x - 1,5$ 1.) $f(x) = -0,5(x^2 - 2x + 3)$ 2.) $f(x) = -0,5(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 3)$ 3.) $f(x) = -0,5[(x^2 - 2x + 1) - 1 + 3]$ 4.) $f(x) = -0,5[(x - 1)^2 + 2]$ 5.) $f(x) = -0,5(x - 1)^2 - 1$ 6.) $S(1 -1)$
Quadratische Gleichungen • Lösungsformel für quadratische Gleichungen: Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ • Anzahl der Lösungen abhängig von Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ ○ $D > 0$: 2 Lösungen ○ $D = 0$: 1 Lösung ○ $D < 0$: keine Lösung	$x^2 + x + 2 = 0$; $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$ $\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -2$ Diese Art der Lösung ist auch als Mitternachtsformel MNF bekannt.

Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen Lösung durch Rückführung auf LGS mit zwei Variablen. 1. Löse eine der drei Gleichungen nach einer Variable auf. 2. Eliminiere diese Variable aus den beiden anderen Gleichungen durch Einsetzen. 3. Diese beiden Gleichungen bilden ein LGS mit zwei Variablen (Einsetzungs- oder Additionsverfahren; Lösung siehe 8. Jgst.)	Löse das LGS: $\begin{array}{lclcl} \text{I} & 2x & +7y & -3z & = & 8 \\ \text{II} & x & +10y & +3z & = & 15 \\ \text{III} & 6x & -3y & -5z & = & 4 \end{array}$ 1. Auflösen von II nach x: IIa $x = 15 - 10y - 3z$ 2. IIa in I: $2 \cdot (15 - 10y - 3z) + 7y - 3z = 8$ Ia: $-13y - 9z = -22$ IIa in III: $6(15 - 10y - 3z) - 3y - 5z = 4$ IIIa: $-63y - 23z = -86$ 3. Mit dem Additionsverfahren ergibt sich: $x = 2; y = 1; z = 1$ Nicht lösbares LGS: $\begin{array}{lclcl} \text{I} & 3x & +2y & +z & = & 6 \\ \text{II} & x & -y & +2z & = & 1 \\ \text{III} & -2x & +y & -3z & = & -3 \end{array}$ $L = \{ \}$ Unendlich viele Lösungen: $\begin{array}{lclcl} \text{I} & x & +2y & +3z & = & 5 \\ \text{II} & 2x & +3y & +5z & = & 8 \\ \text{III} & 3x & -y & +2z & = & 1 \end{array}$ $L = \{(x y z) \mid y = x + 1; z = 1 - x\};$ z. B. $L_1 = (1 2 0)$, oder $L_2 = (-2 -4 0)$ Lösung.
Extremwertaufgaben 1. Term für den gesuchten Extremwert aufstellen. 2. Term mit weiterer Bedingung aufstellen und in den ersten Term einsetzen. 3. Gesamtterm in die Scheitelform bringen. 4. Der Extremwert ist die x-Koordinate des Scheitels	Mit einem 10m langen Zaun soll eine Wiese rechteckig so eingezäunt werden, dass der Flächeninhalt maximal wird. 1. $A = a \cdot b$ 2. $10m = 2a + 2b \Rightarrow b = 5m - a$ $\Rightarrow A = a \cdot (5m - a)$ 3. $A = -a^2 + a \cdot 5m = -(a^2 - a \cdot 5m)$ $= -(a^2 - a \cdot 5m + (2,5m)^2 - (2,5m)^2)$ $= -[(a - 2,5m)^2 - 6,25m^2]$ $= -(a - 2,5m)^2 + 6,25m^2$ 4. Für $a=2,5m$ ergibt sich der maximale Flächeninhalt von $6,25m^2$
Schnittprobleme Die Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen bestimmt man rechnerisch, indem man die Funktionsterme gleichsetzt. Jede Lösung der Gleichung liefert die x-Koordinate eines Schnittpunktes. Die y-Koordinate erhält man durch Einsetzen der x-Koordinate in einen der beiden Funktionsterme.	Bestimme die Koordinaten aller Schnittpunkte der Funktionen f und g. $f(x) = \frac{1}{x}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad g(x) = x - 1,5$ Lösung: $\begin{array}{lcl} \frac{1}{x} & = & x - 1,5 \quad \cdot x \\ 1 & = & x^2 - 1,5x \quad -1 \\ 0 & = & x^2 - 1,5x - 1 \end{array}$ Mit der „Mitternachtsformel“ ergibt sich: $x_1 = -0,5$ und $x_2 = 2$; Einsetzen in f (oder g) ergibt: $S_1(-0,5 -2)$ und $S_2(2 0,5)$
Mengendiagramme Für Mengen A und B gibt es folgende Benennungen: - Gesamtmenge: $\Omega = A \cup B$ - Schnittmenge: $A \cap B$ - Vereinigungsmenge: $A \cup B$ - Restmenge: $\bar{A} = \Omega \setminus A$	 $A \cup B$

Bei Wahrscheinlichkeitsaufgaben wird Ω als **Ergebnismenge** bezeichnet;
A und B nennt man **Ereignisse**.



$$A \cap B$$

$$\bar{A} \cap \bar{B}$$

Vierfeldertafel

Mit Hilfe einer Vierfeldertafel lassen sich absolute Häufigkeiten, relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse darstellen:

	$P(A)$	$P(\bar{A})$	
$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	
$P(\bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	
			1

Es gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beispiel:

Die Weißenhorner KiSS-Kinder mögen Kursleiter Alf (A) zu 70%, Kursleiter Ben (B) zu dreißig Prozent. 10% der Kinder mögen beide Kursleiter.

	$P(A)$	$P(\bar{A})$	
$P(B)$	0,1	0,2	0,3
$P(\bar{B})$	0,6	0,1	0,7
	0,7	0,3	1

Ähnlichkeit

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn man sie durch Vergrößern oder Verkleinern zu kongruenten Figuren machen kann.

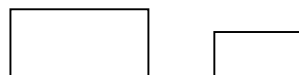
Eigenschaften:

- Entsprechende Winkel sind gleich groß
- Entsprechende Strecken haben das gleiche Längenverhältnis

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn

- sie in zwei (also in allen drei) Winkeln übereinstimmen. (WWW-Satz).
- sie im Verhältnis entsprechender Seitenlängen übereinstimmen. (SSS-Satz)

Bsp:



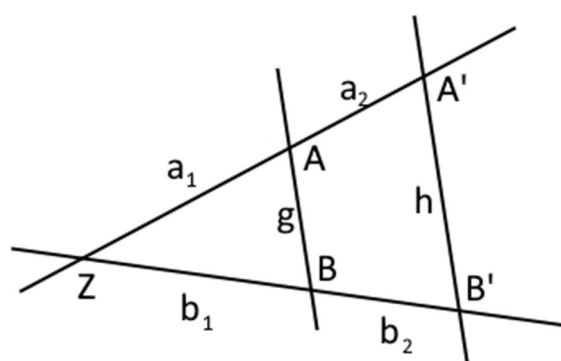
Strahlensatz bei V-Figur

Man benötigt zwei sich schneidende Geraden a und b. Diese werden von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten.

Dann gilt:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}; \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}; \frac{a_1 + a_2}{a_2} = \frac{b_1 + b_2}{b_2}$$

$$\frac{a_1}{g} = \frac{a_1 + a_2}{h}, \frac{b_1}{g} = \frac{b_1 + b_2}{h}$$

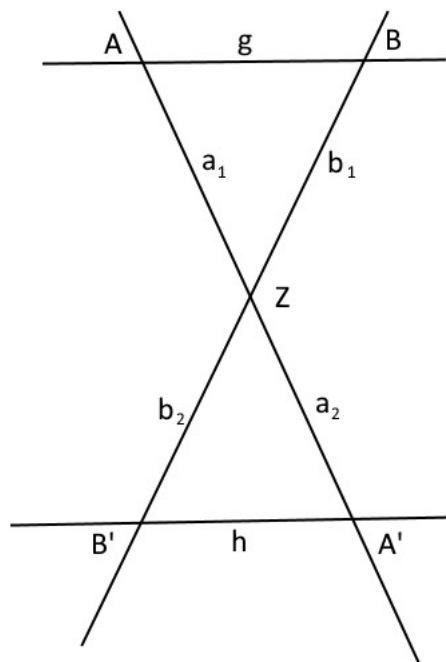


Strahlensatz bei X-Figur

Voraussetzungen wie V-Figur.

Dann gilt:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}; \frac{a_1}{g} = \frac{a_2}{h}; \frac{b_1}{g} = \frac{b_2}{h}$$

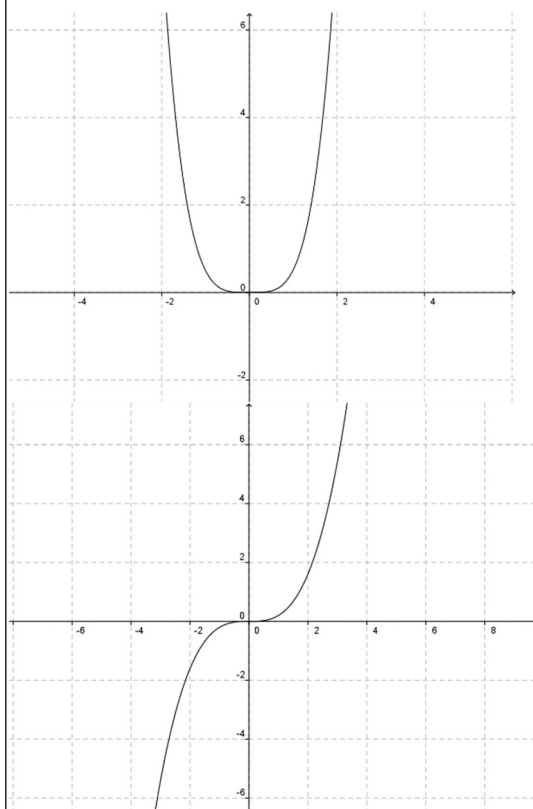


Potenzfunktionen

Eine Funktion der Form: $f(x) = a \cdot x^n$ heißt Potenzfunktion. Der Exponent **n** wird als **Grad der Potenzfunktion** bezeichnet.

($a \in \mathbb{R}/\{0\}; n \in \mathbb{N}$)

- gerader Exponent: Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse
- ungerader Exponent: Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung (0|0).



n-te Wurzeln

Für $a \geq 0$ und $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.

$\sqrt[n]{a}$ heißt n-te Wurzel aus a.

n heißt Wurzelexponent ($n \in \mathbb{N}$);

a heißt Radikand.

Es gilt: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Vereinfache ohne Taschenrechner:

$$\sqrt[4]{49^2} = \sqrt[4]{(7^2)^2} = \sqrt[4]{7^4} = 7^{(4) \cdot \frac{1}{4}} = 7^1 = 7$$

Bestimme die Lösungsmenge zu $x^4 = 81$;

$$\begin{array}{lll} x = \sqrt[4]{81} & \text{oder} & x = -\sqrt[4]{81} \\ x = 3 & \text{oder} & x = -3 \\ \rightarrow & L = \{-3; 3\} & \leftarrow \end{array}$$

Satz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten a und b gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Alternative Formulierung:

Die Quadrate über den Katheten haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.

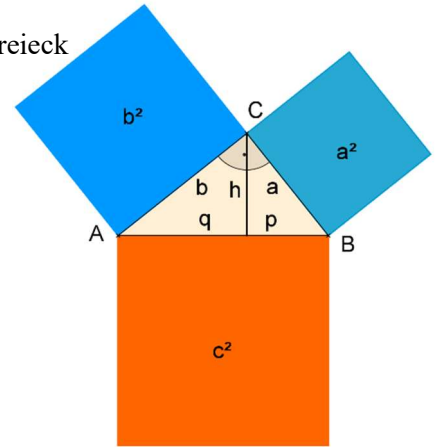
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Kehrsatz:

Gilt für die Seiten a , b und c eines Dreiecks die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Gegeben:
Rechtwinkliges Dreieck
mit $a = 5 \text{ cm}$ und
 $c = 8 \text{ cm}$.

Gesucht: b



$$b^2 = c^2 - a^2 = 39 \text{ cm}^2$$

(S. v. Pythagoras)

$$b = \sqrt{39} \text{ cm} \approx 6,2 \text{ cm}$$

Trigonometrie

Im rechtwinkligen Dreieck legt man fest:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

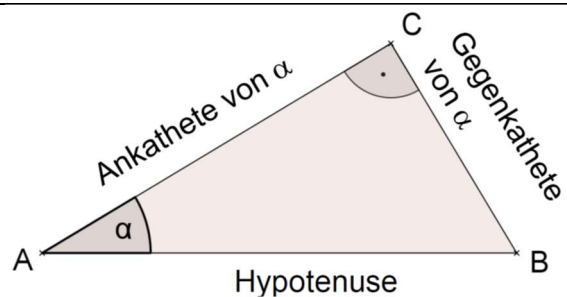
Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:

$$(1) \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$(2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(3) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



Gegeben: Hypotenuse $c = 8,5 \text{ cm}$ und $\alpha = 41^\circ$

Gesucht: β , a und b

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = 8,5 \text{ cm} \cdot \sin 41^\circ \approx 5,6 \text{ cm}$$

$$b = c \cdot \cos \alpha = 8,5 \text{ cm} \cdot \cos 41^\circ \approx 6,4 \text{ cm}$$

Sinussatz:

In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Beispiel: $b = 8 \text{ cm}$; $c = 5 \text{ cm}$; $\gamma = 35^\circ$

$$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c} = \frac{8 \text{ cm} \cdot \sin(35^\circ)}{5 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow \beta_1 \approx 66,6^\circ; \beta_2 \approx 113,4^\circ$$

Kosinussatz:

In jedem Dreieck ABC gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Beispiel: $a = 6 \text{ cm}$; $b = 7 \text{ cm}$; $c = 4 \text{ cm}$

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{49 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2}{2 \cdot 7 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}} = \frac{29}{56}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 58,8^\circ$$