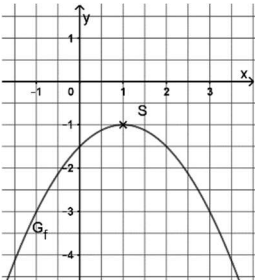


Mathematik Grundwissen Kl. 9 -G9

In der Jahrgangsstufe 9 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:

- Die Schülerinnen und Schüler begründen die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen. Sie verstehen das Grundprinzip eines indirekten Beweises, vollziehen auf dieser Grundlage den Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ nach und erfassen, dass das Beweisen eine zentrale Bedeutung für den logischen Aufbau der Mathematik hat.
- Sie rechnen in der Menge der reellen Zahlen mit Wurzel- und Potenztermen angemessener Komplexität, erläutern ihre Rechenschritte und analysieren Rechenwege unter gezielter Verwendung von Fachsprache.
- Sie lösen innermathematische wie auch realitätsnahe Problemstellungen mithilfe quadratischer Funktionen und quadratischer Gleichungen. Dabei bestimmen und verwenden sie situationsgerecht unterschiedliche Darstellungen der Funktionen und ihrer Terme, argumentieren mit diesen und lösen quadratische Gleichungen vorteilhaft. Sie erläutern und reflektieren ihre Strategien und validieren in Sachsituationen ihrer Ergebnisse.
- Sie nutzen eine dynamische Mathematiksoftware, um die Eigenschaften der Graphen von quadratischen Funktionen und von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten in Abhängigkeit vom jeweiligen Funktionsterm zu untersuchen und zu veranschaulichen.
- Sie veranschaulichen verknüpfte Ereignisse mithilfe von Mengendiagrammen und Vierfeldertafeln, stellen sie in Mengenschreibweise dar und bestimmen ihre Wahrscheinlichkeiten.
- Sie lösen unter flexibler Nutzung der Strahlensätze sowie der Ähnlichkeit von Dreiecken innermathematische Problemstellungen sowie Problemstellungen in Sachsituationen.
- Sie erläutern einen Beweis des Satzes von Pythagoras, unterscheiden ihn von seiner Umkehrung und wenden beide Sätze auch in realitätsnahen Kontexten flexibel an. Dabei ist ihnen die Bedeutung des Satzes in kulturgeschichtlicher wie auch anwendungspraktischer Hinsicht bewusst.
- Sie nutzen auch bei der Lösung anwendungsbezogener Problemstellungen Sinus, Kosinus und Tangens für Berechnungen an Dreiecken. Ihre Lösungswege dokumentieren und präsentieren sie insbesondere unter Verwendung aussagekräftiger Skizzen.

Quelle: <https://www.lehrplanplus.bayern.de/jahrgangsstufenprofil/gymnasium/9> vom 10.01.2023

Wissen und Können	Beispiele
<p>Reelle Zahlen \mathbb{R}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Irrationale Zahlen (unendliche, nichtperiodische Dezimalbruchdarstellung) gehören nicht zu \mathbb{Q}. - Es gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ <p>Quadratwurzeln</p> <p>\sqrt{a} ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. \sqrt{a} heißt Quadratwurzel; a heißt Radikand: $(\sqrt{a})^2 = a$</p> <ul style="list-style-type: none"> - Rechengesetze für Quadratwurzeln: <ol style="list-style-type: none"> Betragsregel: $\sqrt{a^2} = a$ Multiplikationsregel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ Divisionsregel: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ Teilweises Radizieren $\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$ 	<p>irrat. Zahlen: z.B. 1,23456789101...; $\pi = 3,1415...$</p> <p>$\pi \notin \mathbb{Q}$; $1,32 \notin \mathbb{Z}$; $-7 \notin \mathbb{N}$</p> <p>$\sqrt{2,25} = 1,5$; denn $(1,5)^2 = 2,25$ und $(\sqrt{2,25})^2 = 2,25$</p> <p>a) $\sqrt{(-5)^2} = -5$ b) $\sqrt{7a} \sqrt{7a^3} = \sqrt{49a^4} = 7a^2$ c) $\frac{\sqrt{12a^3}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{12a^3}{3a}} = \sqrt{4a^2} = 2 a$ d) $\sqrt{50a^3 b^2} = \sqrt{5^2 a^2 b^2 2a} = 5 ab \sqrt{2a}$</p>
<p>Quadratische Funktionen und ihre Graphen</p> <p>$f: x \mapsto ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$</p> <ul style="list-style-type: none"> - Die Graphen von quadratischen Funktionen sind Parabeln - Term der Normalparabel: $f(x) = x^2$ - Öffnung der Parabel: $\begin{cases} a > 0: \text{nach oben geöffnet} \\ a < 0: \text{nach unten geöffnet} \end{cases}$ - Weite der Parabel: <ul style="list-style-type: none"> • $a > 1$: schmaler als Normalparabel • $a < 1$: breiter als Normalparabel - Scheitelform: <ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \leftrightarrow S(x_s y_s)$ 	<p>Aussagen über den Graphen der Parabel f mit $f: x \mapsto -0,5x^2 + x - 1,5$</p> <p>$a < 0$: Parabel nach unten geöffnet ($a = -0,5$) $a < 1$: Parabel weiter als die Normalparabel ($a = 0,5$)</p> <p>Scheitelform: $f(x) = -0,5(x - 1)^2 - 1$ $S(1 -1)$</p> 

<p>Quadratische Ergänzung: Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung kann man den Term einer quadratischen Funktion so umformen, dass man den Scheitel der zugehörigen Parabel ablesen kann.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.) Den Faktor a vor x^2 ausklammern 2.) Die Hälfte der Zahl vor dem x quadratisch ergänzen: 3.) Die ersten 3 Summanden einklammern. 4.) Binomische Formel und Zahlen umformen. 5.) Den Faktor a wieder reinmultiplizieren 6.) Den Scheitel ablesen 	<p>Beispiel:</p> $f(x) = -0,5x^2 + x - 1,5$ <ol style="list-style-type: none"> 1.) $f(x) = -0,5(x^2 - 2x + 3)$ 2.) $f(x) = -0,5(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 3)$ 3.) $f(x) = -0,5[(x^2 - 2x + 1) - 1 + 3]$ 4.) $f(x) = -0,5[(x - 1)^2 + 2]$ 5.) $f(x) = -0,5(x - 1)^2 - 1$ 6.) $S(1 -1)$
<p>Quadratische Gleichungen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lösungsformel für quadratische Gleichungen: Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösungen: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ • Anzahl der Lösungen abhängig von Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ <ul style="list-style-type: none"> ○ $D > 0$: 2 Lösungen ○ $D = 0$: 1 Lösung ○ $D < 0$: keine Lösung 	$x^2 + x + 2 = 0 ;$ $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$ $\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -2$ <p>Diese Art der Lösung ist auch als Mitternachtsformel bekannt.</p>
<p>Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen</p> <p>Lösung durch Rückführung auf LGS mit zwei Variablen.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Löse eine der drei Gleichungen nach einer Variable auf. 2. Eliminiere diese Variable aus den beiden anderen Gleichungen durch Einsetzen. 3. Diese beiden Gleichungen bilden ein LGS mit zwei Variablen (Einsetzungs- oder Additionsverfahren; Lösung siehe 8. Jgst.) 	<p>Löse das LGS:</p> $\begin{array}{rcl} \text{I} & 2x & +7y & -3z & = & 8 \\ \text{II} & x & +10y & +3z & = & 15 \\ \text{III} & 6x & -3y & -5z & = & 4 \end{array}$ <ol style="list-style-type: none"> 1. Auflösen von II nach x: IIa $x = 15 - 10y - 3z$ 2. IIa in I: $2(15 - 10y - 3z) + 7y - 3z = 8$ Ia: $-13y - 9z = -22$ IIa in III: $6(15 - 10y - 3z) - 3y - 5z = 4$ IIIa $-63y - 23z = -86$ 3. Mit dem Additionsverfahren ergibt sich: $x = 2 ; y = 1; z = 1$ <p>Nicht lösbares LGS:</p> $\begin{array}{rcl} \text{I} & 3x & +2y & +z & = & 6 \\ \text{II} & x & -y & +2z & = & 1 \\ \text{III} & -2x & +y & -3z & = & -3 \end{array}$ $L = \{ \}$ <p>Unendlich viele Lösungen:</p> $\begin{array}{rcl} \text{I} & x & +2y & +3z & = & 5 \\ \text{II} & 2x & +3y & +5z & = & 8 \\ \text{III} & 3x & -y & +2z & = & 1 \end{array}$ $L = \{(x y z) \mid y = x + 1; z = 1 - x\};$ <p>z. B. ist $(1 2 0)$ aber auch $(-2 -4 0)$ Lösung.</p>
<p>Extremwertaufgaben</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Term für den gesuchten Extremwert aufstellen. 2. Term mit weiterer Bedingung aufstellen und in den ersten Term einsetzen. 3. Gesamtterm in die Scheitelform bringen. 4. Der Extremwert ist die x-Koordinate des Scheitels 	<p>Mit einem 10m langen Zaun soll eine Wiese rechteckig so eingezäunt werden, dass der Flächeninhalt maximal wird.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $A = a \cdot b$ 2. $10m = 2a + 2b \Rightarrow b = 5m - a$ $\Rightarrow A = a \cdot (5m - a)$ 3. $A = -a^2 + a \cdot 5m = -(a^2 - a \cdot 5m) = -(a^2 - a \cdot 5m + (2,5m)^2 - (2,5m)^2) = -[(a - 2,5m)^2 - 6,25m^2] = -(a - 2,5m)^2 + 6,25m^2$ 4. Für $a=2,5m$ ergibt sich der maximale Flächeninhalt von $6,25m^2$

Schnittprobleme
 Die Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen bestimmt man rechnerisch, indem man die Funktionsterme gleichsetzt. Jede Lösung der Gleichung liefert die x-Koordinate eines Schnittpunktes. Die y-Koordinate erhält man durch Einsetzen der x-Koordinate in einen der beiden Funktionsterme.

Bestimme die Koordinaten aller Schnittpunkte der Funktionen f und g.
 $f(x) = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad g(x) = x - 1,5$
 Lösung:

$$\frac{1}{x} = x - 1,5 \quad | \cdot x$$

$$1 = x^2 - 1,5x \quad | -1$$

$$0 = x^2 - 1,5x - 1$$

Mit der „Mitternachtsformel“ (siehe oben) ergibt sich:
 $x_1 = -0,5$ und $x_2 = 2$; Einsetzen in f (oder g) ergibt:
 $S_1(-0,5 | -2)$ und $S_2(2 | 0,5)$

Mengendiagramme

Für Mengen A und B gibt es folgende Benennungen:

- Gesamtmenge: $\Omega = A \cup B$
- Schnittmenge: $A \cap B$
- Vereinigungsmenge: $A \cup B$
- Restmenge: $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Bei Wahrscheinlichkeitsaufgaben wird Ω als **Ergebnismenge** bezeichnet; A und B wären dann **Ereignisse**.

$A \cup B$

$A \cap B$

$\bar{A} \cap \bar{B}$

Vierfeldertafel

Mit Hilfe einer Vierfeldertafel lassen sich absolute Häufigkeiten, relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse darstellen:

	$P(A)$	$P(\bar{A})$	
$P(B)$	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	
$P(\bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	
			1

Es gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beispiel:

Die Weißenhorner KiSS-Kinder mögen Kursleiter Alf (A) zu 70%, Kursleiter Ben (B) zu dreißig Prozent. 10% der Kinder mögen beide Kursleiter.

	$P(A)$	$P(\bar{A})$	
$P(B)$	0,1	0,2	0,3
$P(\bar{B})$	0,6	0,1	0,7
	0,7	0,3	1

Ähnlichkeit

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn man sie durch Vergrößern oder Verkleinern zu kongruenten Figuren machen kann.

Eigenschaften:

- Entsprechende Winkel sind gleich groß
- Entsprechende Strecken haben das gleiche Längenverhältnis

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn

- sie in zwei (also in allen drei) Winkeln übereinstimmen. (WWW-Satz).
- sie im Verhältnis entsprechender Seitenlängen übereinstimmen. (SSS-Satz)

Bsp:

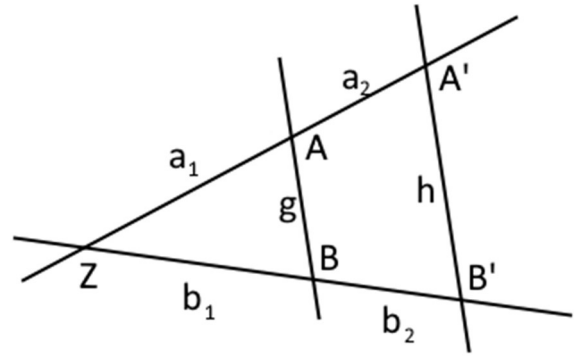
Strahlensatz bei V-Figur

Man benötigt zwei sich schneidende Geraden a und b .
Diese werden von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten.

Dann gilt:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}; \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}; \frac{a_1 + a_2}{a_2} = \frac{b_1 + b_2}{b_2}$$

$$\frac{a_1}{g} = \frac{a_1 + a_2}{h}, \frac{b_1}{g} = \frac{b_1 + b_2}{h}$$

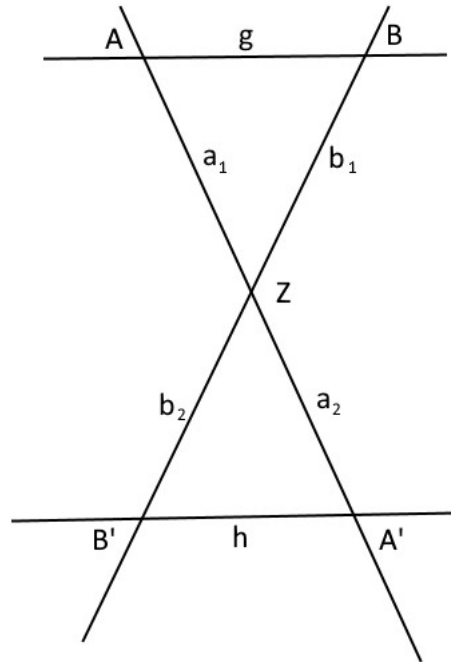


Strahlensatz bei X-Figur

Voraussetzungen wie V-Figur.

Dann gilt:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}; \frac{a_1}{g} = \frac{a_2}{h}; \frac{b_1}{g} = \frac{b_2}{h}$$

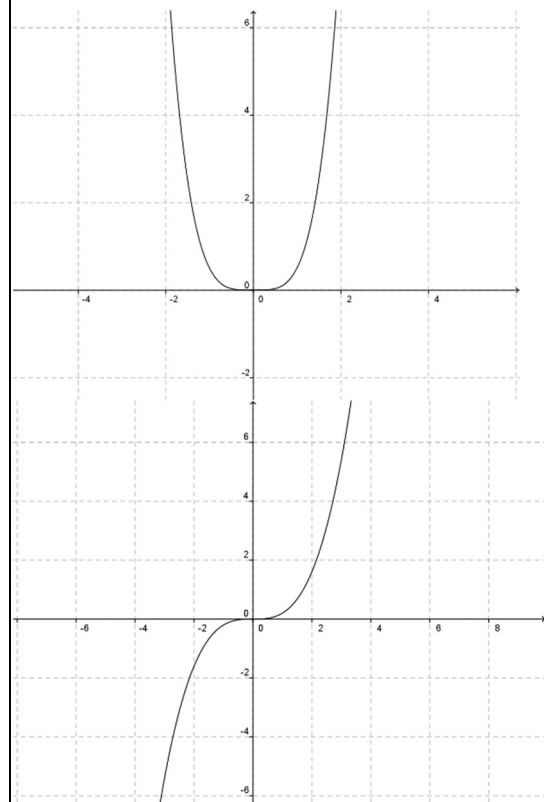


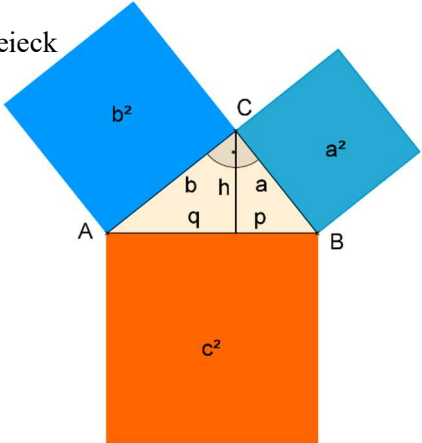
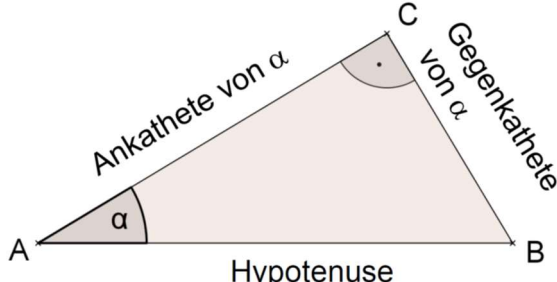
Potenzfunktionen

Eine Funktion der Form: $f(x) = a \cdot x^n$
heißt Potenzfunktion. Der Exponent n wird als
Grad der Potenzfunktion bezeichnet.

($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N}$)

- gerader Exponent: Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse
- ungerader Exponent: Graph ist punktsymmetrisch zu $(0|0)$.



<p>n-te Wurzeln Für $a \geq 0$ und $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. $\sqrt[n]{a}$ heißt n-te Wurzel aus a. n heißt Wurzelexponent ($n \in \mathbb{N}$); a heißt Radikand. Es gilt: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$</p>	<p>Vereinfache ohne Taschenrechner: $\sqrt[4]{49^2} = \sqrt[4]{(7^2)^2} = \sqrt[4]{7^4} = 7^{(4) \cdot \frac{1}{4}} = 7^1 = 7$ Bestimme die Lösungsmenge zu $x^4 = 81$; $x = \sqrt[4]{81}$ oder $x = -\sqrt[4]{81}$ $x = 3$ oder $x = -3$ $L = \{-3; 3\}$</p>
<p>Satz des Pythagoras In jedem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten a und b gilt:</p> $a^2 + b^2 = c^2$ <p>Alternative Formulierung: Die Quadrate über den Katheten haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. $a^2 + b^2 = c^2$</p> <p>Kehrsatz: Gilt für die Seiten a, b und c eines Dreiecks die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig.</p>	<p>Gegeben: Rechtwinkliges Dreieck mit $a = 5$ cm und $c = 8$ cm. Gesucht: b</p>  <p>$b^2 = c^2 - a^2 = 39 \text{ cm}^2$ (Pythagoras) $b = \sqrt{39} \text{ cm} \approx 6,2 \text{ cm}$</p>
<p>Trigonometrie Im rechtwinkligen Dreieck legt man fest:</p> $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$ <p>Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:</p> <p>(1) $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$</p> <p>(2) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$</p> <p>(3) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$</p>	 <p>Gegeben: Hypotenuse $c = 8,5$ cm und $\alpha = 41^\circ$ Gesucht: β, a und b</p> <p>$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$ $a = c \cdot \sin \alpha = 8,5 \text{ cm} \cdot \sin 41^\circ \approx 5,6 \text{ cm}$ $b = c \cdot \cos \alpha = 8,5 \text{ cm} \cdot \cos 41^\circ \approx 6,4 \text{ cm}$</p>
<p>Sinussatz: In jedem Dreieck verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$</p>	<p>Beispiel: $b = 8 \text{ cm}$; $c = 5 \text{ cm}$; $\gamma = 35^\circ$</p> $\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c} = \frac{8 \text{ cm} \cdot \sin(35^\circ)}{5 \text{ cm}}$ $\Rightarrow \beta_1 \approx 66,6^\circ; \beta_2 \approx 113,4^\circ$
<p>Kosinussatz: In jedem Dreieck ABC gilt:</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$	<p>Beispiel: $a = 6 \text{ cm}$; $b = 7 \text{ cm}$; $c = 4 \text{ cm}$</p> $\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2}{2 \cdot 7 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}} = \frac{29}{56}$ $\Rightarrow \alpha \approx 58,8^\circ$