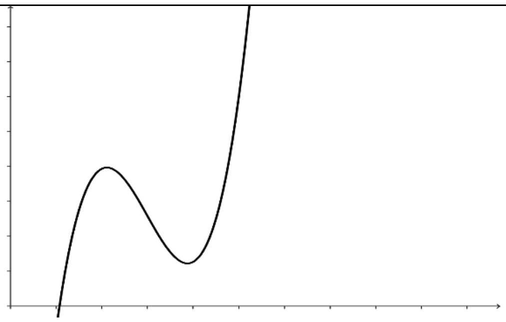
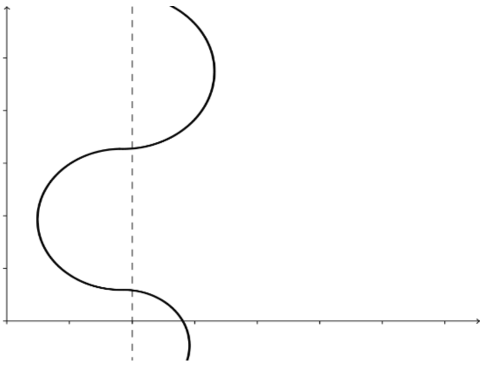
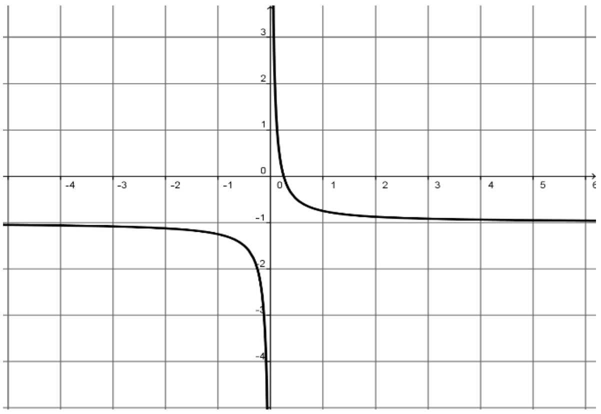
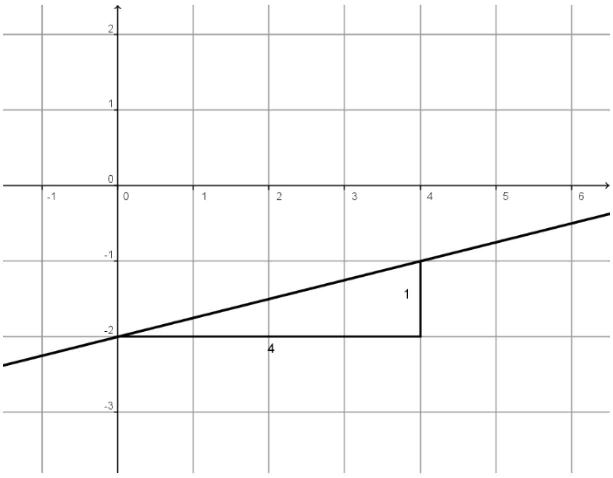
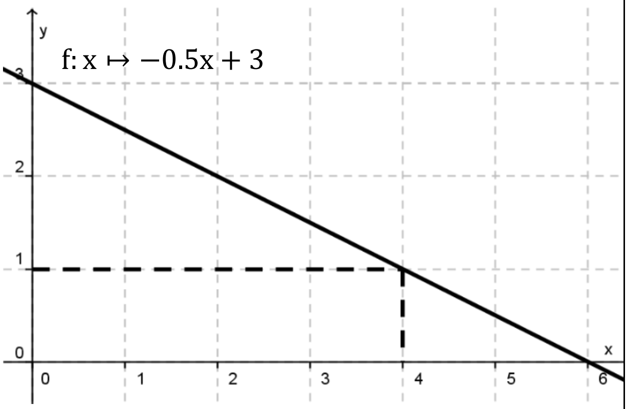
I. Funktionen

Wissen	Beispiel
Definition Ist eine Zuordnung $x \mapsto y$ eindeutig, so heißt sie **Funktion**. Jedem x wird genau ein y zugeordnet. Bei einer Schulaufgabe ist die Zuordnung Schüler $\longmapsto$ Note eine Funktion, denn sie ist eindeutig. Die Zuordnung Note $\longmapsto$ Schüler ist nicht eindeutig, also auch keine Funktion.	 Funktionsgraph  kein Funktionsgraph
Funktionsterm und Graph $f: x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$ Alle Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert berechnet werden kann, bilden die Definitionsmenge D_f. Ist keine Definitionsmenge angegeben, so ist die maximale Definitionsmenge gemeint. Auf dem Graphen G_f liegen alle Punkte $P(x\mid y)$, wenn x und y von P die Funktionsgleichung $y = f(x)$ erfüllen.	 $f(x) = \frac{1}{4x} - 1$ $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wegen $f(1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ gilt: $P\left(1 \middle\vert -\frac{3}{4}\right) \in G_f$

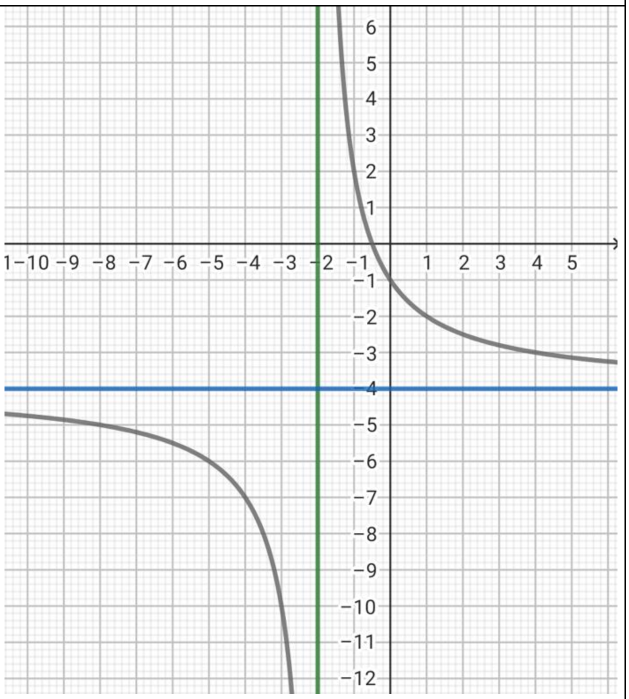
Wissen	Beispiel
Nullstellen einer Funktion Nullstelle der Funktion f(x) sind diejenigen Stellen auf der x-Achse, für die $f(x) = 0$ gilt. Schnittpunkt mit der x-Achse ist dann $N(x\|0)$.	$f(x) = 2x + 4$ Nullstelle: $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow 2x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow 2x = -4$ $\Leftrightarrow x = -2$ f hat an der Stelle $x = -2$ eine Nullstelle.

II. Lineare Funktionen

Definition Eine Funktion ist linear, wenn $f: x \mapsto m \cdot x + t$. Dabei gilt: 1. Der Graph ist eine Gerade und schneidet die y-Achse im Punkt $(0\| t)$. 2. Der Graph von f besitzt die Steigung m. 3. Zur Berechnung von m braucht man zwei Punkte $P_1(x_1\|y_1)$ und $P_2(x_2\|y_2)$, es gilt: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$f(x) = \frac{1}{4}x - 2$ 
Bestimmung des Funktionsterms Fall 1: Ein Punkt $P(x_P\|y_P)$ und m sind bekannt. 1. Schritt: da f linear ist: $f(x) = mx + t$ 2. Schritt: Lösen der Gleichung $y_P = mx_P + t$ nach t. Fall 2: Es sind zwei Punkte $P_1(x_1\|y_1)$ und $P_2(x_2\|y_2)$ auf G_f bekannt. 1. Schritt: da f linear ist: $f(x) = m\,x + t$. 2. Schritt: Es gilt $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.	$P(4\|5)$ liegt auf dem Graphen der linearen Funktion f mit der Steigung 2. 1. $f(x) = 2x + t$ 2. $f(4) = 2 \cdot 4 + t = 5 \;\Rightarrow t = -3$ Also: $f(x) = 2x - 3$ $P_1(3\|4)$ und $P_2(5\|1)$ liegen auf dem Graphen der linearen Funktion f. 1. $f(x) = m\,x + t$ 2. $m = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

Wissen	Beispiel
3. Schritt: Lösen der Gleichung $f(x_1) = m\,x_1 + t = y_1$ nach t.	3. $f(3) = -\frac{3}{2}\cdot 3 + t = 4 \Rightarrow t = \frac{17}{2}$ Also: $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$
Lineare Funktionen und lineare Gleichungen Die Gleichung $mx + t = c$ kann sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch gelöst werden. Zur rechnerischen Lösung sind Äquivalenzumformungen nötig. Bei der zeichnerischen Lösung muss zunächst der Graph der linearen Funktion $f\colon x \mapsto mx + t$ gezeichnet werden. Nun kann man anhand des Graphen ablesen, für welchen x-Wert man den vorgegebenen y-Wert erhält. Die Nullstelle der Funktion erhält man durch Lösen der Gleichung $mx + t = 0$	$-\frac{1}{2}x + 3 = 1 \Rightarrow x = 4$  x = 6 ist Nullstelle der Funktion f.
Lineare Ungleichungen Ungleichungen sind genauso zu behandeln wie Gleichungen nur mit der Ausnahme, dass bei der Multiplikation bzw. Division mit einer negativen Zahl auf beiden Seiten das Ungleichheitszeichen umgedreht werden muss. Die Lösung einer Ungleichung kann sowohl als Menge als auch als Intervall angegeben werden.	$(2 - x)\cdot 7 < -21$ $14 - 7x < -21 \quad \vert -14$ $-7x < -35 \quad \vert :(-7)$ $x > 5$ $L = \{x \mid x > 5\} =]5;\infty[$

III. Gebrochen-rationale Funktionen

Wissen	Beispiel
Definition Enthalten Funktionsterme Bruchterme, so nennt man die Funktionen gebrochen-rational. z.B. $f: x \mapsto \frac{6}{x+2} - 4$ Dabei muss die Funktionsvariable zwingend im Nenner des Terms vorkommen. Die Definitionsmenge besteht aus allen Zahlen, für die der Nenner nicht Null wird. Asymptoten sind Geraden, denen sich ein Graph beliebig nahe annähert. Es gibt dabei u.a. senkrechte und waagrechte Asymptoten. Der Graph ist eine Hyperbel.	 $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$ senkrechte Asymptote: $x = -2$ waagrechte Asymptote: $y = -4$
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen Ansatz zur Berechnung des Schnittpunkts mit der x-Achse: $f(x) = 0$ Ansatz zur Berechnung des Schnittpunktes mit der y-Achse: $y = f(0)$	$f(x) = \frac{6}{x+2} - 4$ $\frac{6}{x+2} - 4 = 0 \quad \mid +4$ $\frac{6}{x+2} = 4 \quad \mid \cdot (x+2)$ $6 = 4x + 8 \quad \mid -8$ $-2 = 4x \quad \mid : 4$ $x = -0{,}5 \qquad N = S_x(-0{,}5 \mid 0)$ $f(0) = \frac{6}{0+2} - 4 = -1 \qquad S_y(0 \mid -1)$

IV. Proportionalität

Direkte Proportionalität

Eine Zuordnung heißt direkt proportional, wenn dem Doppelten, Dreifachen, dem r-fachen der einen Größe, das Doppelte, Dreifache, r-fache der anderen Größe zugeordnet wird.

Die Wertepaare sind **quotientengleich**.

Der Graph ist eine **Ursprungsgerade**.

Die Zuordnung ist eine lineare Funktion.

Beispiel: 1 kg Mehl kostet 2,50 €.

x : Mehl in kg, y : Preis in €

x	1	2	5
y	2,5	5	12,5
y : x	2,5	2,5	2,5

$$f(x) = 2{,}5x$$

Indirekte Proportionalität

Eine Zuordnung heißt indirekt proportional, wenn dem Doppelten, Halben, dem r-fachen der einen Größe, das Halbe, Doppelte, $\frac{1}{r}$-fache der anderen Größe zugeordnet wird.

Die Wertepaare sind **produktgleich**.

Der Graph ist eine **Hyperbel**.

Die Zuordnung ist eine gebrochen-rationale Funktion.

Beispiel: Eine 2 m lange Holzlatte wird in gleich lange Teile zersägt.

x : Anzahl der Teile, y : Länge der Teile in cm

x	2	4	10
y	100	50	20
y · x	200	200	200

$$f(x) = \frac{200}{x}$$

V. Bruchterme und Bruchgleichungen

Erweitern und Kürzen

Wird ein Bruch erweitert bzw. gekürzt, so wird sowohl der Zähler als auch der Nenner mit der gleichen Zahl(Variablen, Term) multipliziert bzw. dividiert.

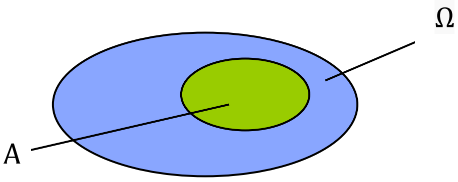
$$\frac{x^2 + 2x}{4 + 2x} = \frac{x \cdot (x + 2)}{2 \cdot (2 + x)} = \frac{x}{2}$$

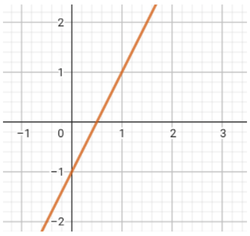
$$\xrightarrow[\textit{Kürzen}]{} \qquad \xleftarrow[\textit{Erweitern}]{}$$

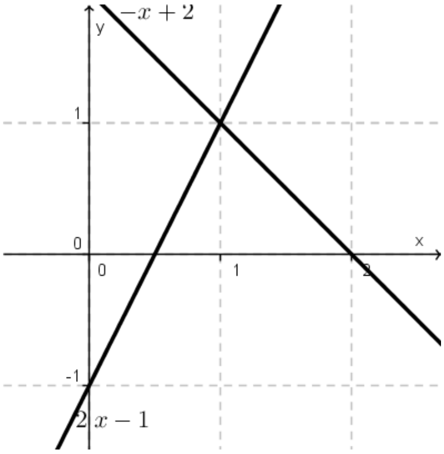
Wissen	Beispiel
Addieren und Subtrahieren Bruchterme können nur dann addiert bzw. subtrahiert werden, wenn bei allen Brüchen der Nenner gleich ist. Oftmals muss man deshalb sinnvoll erweitern bzw. kürzen. Der Nenner bleibt dabei erhalten, lediglich die Zähler werden addiert bzw. subtrahiert.	$\frac{4}{x}-\frac{2x-3}{x-1}=\frac{4\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}-\frac{(2x-3)\cdot x}{(x-1)\cdot x}$ $=\frac{4x-4-(2x^2-3x)}{x\cdot(x-1)}$ $=\frac{-2x^2+7x-4}{x\cdot(x-1)}$
Multiplizieren und Dividieren Zum Multiplizieren von Bruchtermen muss Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler multipliziert werden. Zum Dividieren zweier Bruchterme muss der Kehrbruch des Divisors mit dem Dividenden multipliziert werden.	$\frac{3x}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x^2}=\frac{3x\cdot(2x+1)}{(2x+1)\cdot x^2}=\frac{3}{x}$ $\frac{2x}{x+1}:\frac{x-2}{x+1}=\frac{2x\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{2x}{x-2}$
Negative Exponenten $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ Es gilt: $x^n\cdot x^m=x^{n+m}$ $x^n : x^m=x^{n-m}$ $(x^n)^m=x^{n\cdot m}$ m und n sind beliebige ganze Zahlen.	$\frac{x^3\cdot x^{-4}}{x^{-2}}=x^{3+(-4)-(-2)}=x^1=x$
Bruchgleichungen Zum Auflösen von Bruchgleichungen muss mit dem Hauptnenner beider Brüche multipliziert werden. Als Lösung kommen nur Inhalte der Definitionsmenge in Frage.	$\frac{2x-1}{1-3x}=\frac{x+1}{6x-2}$ $\frac{2x-1}{1-3x}=\frac{x+1}{-2\cdot(-3x+1)}$ | · (-2)(1-3x) HN $\frac{-2(1-3x)(2x-1)}{(1-3x)}=\frac{(x+1)(-2)(1-3x)}{-2(1-3x)}$ $-2(2x-1)=x+1$ $-4x+2=x+1$ $1=5x\Rightarrow x=\frac{1}{5}$

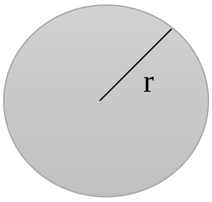
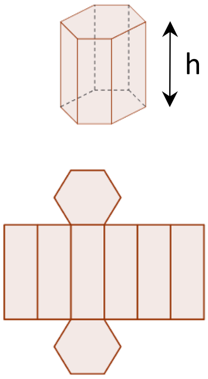
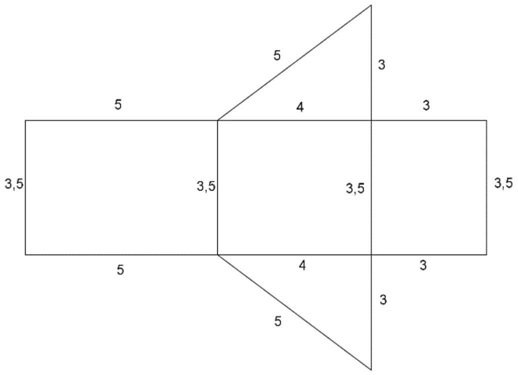
Wissen	Beispiel

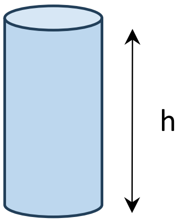
VI. Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ergebnismenge Ergebnismenge nennt man die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes. Sie wird mit Ω bezeichnet. Das einzelnen Ergebnisse werden mit ω_1, ω_2, ω_3, ... bezeichnet.	Werfen eines Würfels : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ Werfen einer Münze : $\Omega = \{\text{Kopf}; \text{Zahl}\}$ oder $\Omega = \{0;\ 1\}$
Ereignis Eine Teilmenge von Ω heißt Ereignis. Jedes Element des Ereignisses A ist in Ω enthalten. Man schreibt: $A \subset \Omega$	 Zufallsexperiment: „einmaliges Werfen eines Würfels“ Ergebnis A = „Augenzahl des Würfels gerade“ $\Rightarrow$ A = {2; 4; 6} Das Ereignis A ist dann eingetreten, wenn 2, 4 oder 6 gewürfelt wird.
Gegenereignis Zu jedem Ereignis A gibt es ein Gegenereignis $\bar{A}$, welches aus den Ergebnissen aus Ω besteht, die nicht zu A gehören. Man schreibt auch: $\bar{A} = \Omega \setminus A$	Werfen eines Würfels : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $A = \{2; 4; 6\}$ $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$
Wahrscheinlichkeit Dem Ereignis A wird bei einem Zufallsexperiment eine Wahrscheinlichkeit P(A) zwischen Null und Eins zugeordnet. Die relative Häufigkeit von A, die bei zunehmenden Wiederholungen des Experimentes auftritt, nähert sich dem Wert von P(A) an.	Zufallsexperiment: Einmaliges Werfen eines fairen Würfels P („Zahl höchstens 2“) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ P („ungerade Zahl“) = 0,5

Wissen	Beispiel
Laplace-Experiment Bei einem Laplace-Experiment sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis bei einem Laplace-Experiment mit n Ergebnissen beträgt somit $\frac{1}{n}$. **Laplace-Wahrscheinlichkeit** Um bei einem Laplace-Experiment an die Wahrscheinlichkeit P(A) des Ereignisses zu bekommen, muss man die Anzahl der für A zutreffenden Ergebnisse durch die Gesamtzahl der Ergebnisse dividieren. $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$ Man spricht auch: „die Mächtigkeit von A durch die Mächtigkeit von Ω“.	Werfen eines fairen Würfels oder einer fairen Münze. Einmaliges Werfen eines fairen Würfels: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ Ereignis A = „Augenzahl ist Primzahl“ $A = \{2; 3; 5\}$ Es ergibt sich die Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{3}{6} = 0{,}5$
Zählprinzip Wird aus k verschiedenen Mengen mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ Elementen jeweils ein Element gezogen, so gibt es $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ verschiedene Möglichkeiten.	Eva hat vier Hosen ($m_1 = 4$), drei Pullover ($m_2 = 3$) und zwei Paar Schuhe ($m_3 = 2$). Dann gibt es für sie $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten, sich verschieden zu kleiden.
VII. Lineare Gleichungssysteme LGS	
Lineare Gleichung mit zwei Variablen Für eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten gilt: 1. Die Lösung ist immer ein Zahlenpaar. 2. Es gibt unendliche viele Lösungen. 3. Alle möglichen Lösungen liegen auf einer Geraden.	Lösungen der Gleichung $4x - 2y = 2$ sind z.B. $P(1\mid 1)$, $Q(0\mid -1)$, usw. Diese Punkte liegen auf der Geraden $y = 2x - 1$. 

Wissen	Beispiel
Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen (LGS) Ein lineares Gleichungssystem besteht aus zwei oder mehreren Gleichungen mit 2 Unbekannten: Falls ein Zahlenpaar jede Gleichung des LGS löst, so ist es Lösung des Systems. **Zeichnerisches Lösen eines LGS mit zwei Variablen** Ein LGS kann zeichnerisch gelöst werden, indem die beiden Geraden in ein Koordinatensystem eingetragen werden. Dabei entsteht ein Schnittpunkt, der beide Gleichungen löst und somit Lösung des LGS ist.	(I) $x + y = 2 \quad \Rightarrow \; y = -x + 2$ (II) $2x - y = 1 \quad \Rightarrow \; y = 2x - 1$ Schnittpunkt: P(1|1) ist Lösung des LGS 
Zwei Rechenverfahren zum Lösen eines LGS 1. Beim **Einsetzverfahren** wird eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst. Die erhaltende Bedingung wird anschließend in die zweite Gleichung eingesetzt. Diese kann nun aufgelöst werden. Anschließend wird das Ergebnis wieder in die erste Gleichung eingesetzt und die zweite Variable berechnet. 2. Beim **Additionsverfahren** werden die zwei Gleichungen so miteinander addiert bzw. voneinander subtrahiert, dass eine der beiden Variablen wegfällt. Hierfür muss oftmals durch Multiplizieren eine der	(I) $y + 1 = 2x$ (II) $4x + y = 7$ (I) nach y auflösen: $y = 2x - 1$ Und in (II) einsetzen: $4x + 2x - 1 = 7$ Gleichung lösen: $6x = 8$ $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ In (I) einsetzen: $y = 2 \cdot \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3}$ Lösung des LGS ist $\left(\frac{4}{3}\middle\vert\frac{5}{3}\right)$. (I) $3x - 4y = 5$ (II) $x - 2y = -1$ |·(- 3) (I) $3x - 4y = 5$ (IIa) $-3x + 6y = 3$ |(I) + (IIa)

Wissen	Beispiel
beiden Gleichungen vorbereitet werden. Anschließend muss die Gleichung nach der verbliebenen Variable aufgelöst werden. Das erhaltene Ergebnis wird anschließend wieder in die Ausgangsgleichung eingesetzt und man erhält das Lösungspaar.	$2y = 8 \quad \Longrightarrow \quad y = 4$ $y = 4$ in (II) einsetzen: $x - 2 \cdot 4 = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = 7$ Lösung des LGS ist $(7 \vert 4)$.
VIII. Geometrie	
Kreis  Ein Kreis mit Radius r besitzt einen Umfang von $U = 2\pi r$ Und einen Flächeninhalt von $A = \pi r^2$ π ist dabei eine nicht-rationale Zahl. $\pi = 3{,}141592654 \ldots$	Der Erdradius beträgt ca. 6370 km. Damit berechnet sich die Länge des Äquators: $U = 2\pi r = 2\pi \cdot 6370 \text{ km} \approx 40\,000 \text{ km}$ Die Fläche eines runden Tisches beträgt 2 m^2. $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2 \text{ m}^2}{\pi}} \approx 0{,}80 \text{ m} \qquad d = 2r$ Der Durchmesser des Tisches beträgt 1,6 m.
Gerades Prisma  Der Oberflächeninhalt O eines geraden Prismas berechnet sich wie folgt: $O = 2 \cdot G + M$ G ist die Deckfläche, M ist die Mantelfläche Das Volumen des Prismas berechnet sich wie folgt: $V = G \cdot h$ h ist die Höhe des Prismas.	Netz eines geraden Prismas mit dreieckiger Grundfläche und der Höhe von 3,5 cm.  $O = 3{,}5\text{cm} \cdot (5\text{cm} + 4\text{cm} + 3\text{cm}) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{cm} \cdot 3\text{cm} = 54\text{cm}^2$ $V = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{cm} \cdot 3\text{cm} \cdot 3{,}5\text{cm} = 42\text{cm}^3$

Wissen	Beispiel
Gerader Zylinder  Der Oberflächeninhalt O beträgt $O = 2 \cdot G + M$. Die Grundfläche G ist ein Kreis: $G = \pi \cdot r^2$ Die Mantelfläche ist ein Rechteck: $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ Das Volumen berechnet sich wie folgt: $V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$	Ein zylinderförmiges Ölfass ist 880 mm hoch und besitzt einen Durchmesser von 585 mm. $V = \pi \cdot (292{,}5\ \text{mm})^2 \cdot 880\ \text{mm} \approx 237\ \text{dm}^3$ $O =$ $2 \cdot \pi \cdot (292{,}5\ \text{mm})^2 + 2 \cdot \pi \cdot 292{,}5\ \text{mm} \cdot 880\text{mm}$ $\approx 215\ \text{dm}^2$ Das gefüllte Ölfass beinhaltet ca. 237 Liter. Für einen Neuanstrich wird Farbe für ca. 2,15 m^2 erforderlich.