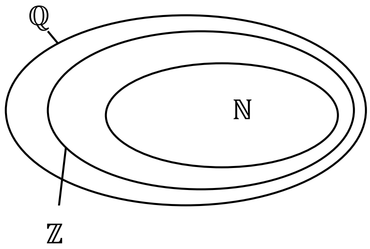
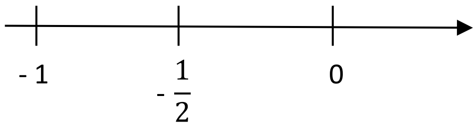
MATHEMATIK GRUNDWISSEN Kl. 6

1.Rationale Zahlen

1.1 Bruchteile und Bruchzahlen

Bruchteil Das Ganze wird durch den Nenner geteilt und das Ergebnis mit dem Zähler multipliziert	$\frac{2}{4}$ von 48 kg = (48 kg : 4) · 2 = 12 kg · 2 = 24 kg $\frac{1}{3}$ h = $\frac{1}{3}$ von 1 h = (1 h : 3) · 1 = (60 min : 3) · 1 = 20 min · 1= 20 min
Erweitern Zähler und Nenner werden mit der gleichen natürlichen Zahl multipliziert. Der Wert des Bruches ändert sich beim Erweitern nicht.	$\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{12}{18}$
Kürzen Zähler und Nenner werden durch die gleiche natürliche Zahl dividiert. Der Wert wird beim Kürzen der Brüche nicht geändert.	$\frac{6}{18} = \frac{6:6}{18:6} = \frac{1}{3}$
Bruchzahlen Die aus einem Bruch durch Erweitern oder Kürzen entstehenden Brüche geben dieselbe Bruchzahl an.	$\frac{12}{18}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ und $\frac{120}{180}$ geben dieselbe Bruchzahl an.

Bruchzahlen als Quotienten Die Quotienten zweier natürlicher Zahlen lassen sich als Bruchzahl darstellen. Es besteht auch die umgekehrte Möglichkeit des Schreibens eines Bruchs als Quotienten. **Anteile** werden als Quotient zweier Größen der gleichen Art berechnen.	$27 : 36 = \frac{27}{36}$ 13 s von 15 s = 13 s : 15 s = $\frac{13}{15}$
Vergleichen von Brüchen Wenn man Brüche gleichnamig macht oder auf den gleichen Zähler bringt, kann man sie vergleichen.	$\frac{6}{20} = \frac{30}{100}$ $\frac{22}{25} = \frac{88}{100}$ also $\frac{6}{20} < \frac{22}{25}$
Rationale Zahlen Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ besteht aus den Bruchzahlen und ihren Gegenzahlen. Falls bei einem Quotient a:b, bei dem a und b ganze Zahlen sind und b nicht 0 ist, ist der Quotient die rationale Zahl $\frac{a}{b}$, also a : b = $\frac{a}{b}$	$-\frac{4}{7}$; 0,4; 8; -2; $3\frac{6}{9}$ sind rationale Zahlen. $-\frac{2}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{2}{-4}$
Zahlenmengen $\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen z.B. { 1,2,3, …} $\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen z.B. {…, -2,-1,0, +1,+2,…} $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen z.B. {-3, $-2\frac{1}{2}$, -0,5, $\frac{1}{2}$, 1,5}	

Anordnung Von zwei rationalen Zahlen a und b ist diejenige größer, die auf der Zahlengeraden weiter rechts liegt.	 $\boxed{-1 < -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2} < 0}$

1.2 Dezimalbrüche

Dezimalbrüche Die 1. (2., 3,…) Stelle hinter dem Komma bedeutet Zehntel (Hundertstel,…)	$231{,}597 = 231 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} + \frac{7}{1000}$
Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche Man erweitert oder kürzt den Nenner auf eine Zehnerpotenz oder dividiert den Zähler durch den Nenner.	$\frac{12}{75} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0{,}16$ $\frac{49}{35} = \frac{7}{5} = 7 : 5 = 1{,}4$
Runden von Dezimalbrüchen Nachdem man die gewünschte Zahl der Nachkommastellen festgelegt hat, rundet man die Ziffer auf der nächsten Nachkommastelle nach den üblichen Regeln.	$123{,}74 \approx 124$ (auf E gerundet) $74{,}0054 \approx 74{,}0$ (auf Z gerundet) $-0{,}0855 \approx -0{,}086$ (auf T gerundet)

1.3 ADDITION UND SUBTRAKTION VON BRÜCHEN

Addieren und Subtrahieren von Brüchen Um Brüche addieren oder subtrahieren zu können, müssen diese gleiche Nenner haben. Falls nicht, müssen sie zunächst gleichnamig gemacht, d.h. auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden. Dann addiert bzw. subtrahiert man die Zähler und behält den gemeinsamen Nenner bei: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ bzw. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$	$\frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{4}{16} + \frac{5}{16} = \frac{9}{16}$ $\frac{5}{6} - \frac{3}{14} = \frac{35}{42} - \frac{9}{42} = \frac{26}{42} = \frac{13}{21}$
Ermittlung gemeinsamer Nenner durch Faktorzerlegung Um gemeinsame Teiler der Nenner zweier Brüche zu finden, verwendet man die Methode der Faktorzerlegung von beiden Nennern durch. Danach werden alle einzelnen Faktoren multipliziert und dabei die gefundenen gemeinsamen Teiler nur einmal berücksichtigt. Der kleinstmögliche gemeinsame Nenner bezeichnet man als das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV).	$\frac{5}{12} - \frac{9}{28} = \frac{5 \cdot 7}{84} - \frac{9 \cdot 3}{84} = \frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ NR: 12 = 3 · 4 28 = 4 · 7 möglicher Nenner: 3 · 4 · 7 = 84 84 ist das kgV der Nenner 12 und 28.

Addieren und Subtrahieren gemischter Zahlen

Als erstes müssen die Brüche gleichnamig werden, falls dies noch nicht der Fall ist. Danach werden die Ganzen und die Brüche getrennt voneinander addiert und zusammengefasst.

Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, die gemischten Zahlen zuerst in Brüche umzuwandeln und dann erst zu addieren oder zu subtrahieren.

Addieren:

$$2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2} = 2\frac{4}{6} + 3\frac{3}{6} = 5\frac{7}{6} = 6\frac{1}{6}$$

Subtrahieren: $5\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6} =$

$$= 5\frac{3}{12} - 2\frac{10}{12}$$

$$4\frac{15}{12} - 2\frac{10}{12} = 2\frac{5}{12}$$

$$3 + \left(-\frac{7}{12}\right) = 2\frac{5}{12}$$

$$5\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6} = \frac{21}{4} - \frac{17}{6} = \frac{63}{12} - \frac{34}{12} = \frac{29}{12} = 2\frac{5}{12}$$

Addieren und Subtrahieren von Dezimalbrüchen

Bei Dezimalbrüchen wird, genau wie bei den ganzen Zahlen auch, stellenweise addiert bzw. subtrahiert. Dabei wird der Stellenwert der Ziffern durch das Komma markiert. Beim Untereinanderschreiben muss Komma unter Komma stehen.

Ergänzen: oder Borgen:

$$\begin{array}{r} 43{,}421 \\ +\ 194{,}7 \\ {\scriptstyle 1\ 1}\\ \hline 238{,}121 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 742{,}36 \\ -\ \ 8{,}356 \\ {\scriptstyle 1\ \ 1}\\ \hline 734{,}004 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\overset{3}{\cancel{4}}2{,}3\overset{5}{\cancel{6}} \\ -\ \ 8{,}356 \\ \hline 734{,}004 \end{array}$$

1.4 MULTIPLIKATION UND DIVISION VON BRUCHZAHLEN

Multiplikation eines Bruches mit einer natürlichen Zahl Dabei wird der Zähler mit der natürlichen Zahl multipliziert und der Nenner beibehalten.	$9 \cdot \frac{5}{6} = \frac{9 \cdot 5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7\frac{1}{2}$
Division eines Bruches durch eine natürliche Zahl Nun muss der Nenner mit der natürlichen Zahl multipliziert werden. Diesmal wird der Zähler unverändert beibehalten. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} \; (c \neq 0)$	$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \cdot 3} = \frac{2}{7 \cdot 1} = \frac{2}{7}$
Multiplikation zweier Brüche Es wird Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler multipliziert. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ Doch davor muss erst einmal, wenn möglich, gekürzt werden. In gemischter Schreibweise dargestellte Faktoren müssen als Brüche geschrieben werden.	$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$
Division zweier Brüche Der Dividend wird mit dem Kehrbruch des Divisors multipliziert. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \; (b, c, d \neq 0)$	$\frac{35}{44} : \frac{10}{11} = \frac{35}{44} \cdot \frac{11}{10} = \frac{7 \cdot 11}{44 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{7}{8}$

Darstellung des Kehrwerts als Potenz mit negativem Exponenten $a^{-1} = \frac{1}{a}$ **Verallgemeinerung auf Potenzen mit negativen Exponenten** $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$5^{-1} = \frac{1}{5}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$ $6^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^3$ $\left(\frac{2}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{2}\right)^4$
Multiplikation von Dezimalbrüchen Zunächst wird das Komma beim Multiplizieren vernachlässigt. Zuletzt wird das Komma so gesetzt, dass das Ergebnis ebenso viele Stellen hinter dem Komma hat wie beide Faktoren zusammen.	2,1 · 6,34 12 6 + 6 3 + 8 4 1 1 13,314 0,23 · 0,4 92 0,092
Division von Dezimalbrüchen Das Komma wird bei beiden Zahlen so weit nach rechts verschoben, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist, dann wird die Division ausgeführt. Beim Überschreiten des Kommas muss auch im Ergebnis ein Komma gesetzt werden. Das Ergebnis der Division kann auch ein periodischer Dezimalbruch sein.	3,78 : 1,4 = 37,8 : 14 = 2,7 - 28 98 - 98 0

1.5 Verbindung der Grundrechenarten bei rationalen Zahlen

Addition und Subtraktion Addieren zweier rationaler Zahlen: Gleiche Vorzeichen: 1. Addiere die Beträge 2. Gib der Summe das gemeinsame Vorzeichen Verschiedene Vorzeichen: 1. Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag 2. Gib der Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag **Subtrahieren** einer Zahl bedeutet dasselbe wie Addieren ihrer **Gegenzahl**.	$(+1{,}2) + (+0{,}4) = +1{,}6$ $(-1{,}2) + (-0{,}4) = -1{,}6$ $(-1{,}2) + (+0{,}4) = -0{,}8$ $(+1{,}2) + (-0{,}4) = +0{,}8$ $(-1{,}2) - (-0{,}4) = (-1{,}2) + (+0{,}4) = -0{,}8$
Multiplikation und Division Multiplizieren zweier rationaler Zahlen: 1. Multipliziere die Beträge 2. Bei gleichen Vorzeichen gib dem Produkt das VZ +, bei verschiedenen VZ gib dem Produkt das VZ - Für alle rationale Zahlen a gilt: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ **Dividieren** durch eine Zahl bedeutet dasselbe wie Multiplizieren mit ihrer **Kehrzahl**. Für alle rationalen Zahlen $a \neq 0$ gilt: $0 : a = 0$ Durch null kann man nicht dividieren.	$(+0{,}5) \cdot (+0{,}7) = +0{,}35 = 0{,}35$ $(-0{,}5) \cdot (-0{,}7) = +0{,}35 = 0{,}35$ $(-0{,}5) \cdot (+0{,}7) = -0{,}35$ $(+0{,}5) \cdot (-0{,}7) = -0{,}35$

Verbindung der Grundrechenarten Klammern legen die Reihenfolge der Rechenschritte fest. Kommen in einem Ausdruck sowohl Punkt- als auch Strichrechnungen vor, so gilt „Punkt vor Strich“.	$[\,1 + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{3}\,] : (-\frac{3}{4})$ $= [\,1 + (-\frac{1}{6})] \cdot (-\frac{4}{3}) = \frac{5}{6} \cdot (-\frac{4}{3}) = -\frac{10}{9}$
Rechengesetze Für alle rationalen Zahlen a, b und c gilt: Kommutativgesetze: $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$ Assoziativgesetze: $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Distributivgesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ Mit Rechengesetzen lassen sich Rechenvorteile nutzen.	$(-\frac{2}{9}) \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2} = [(-\frac{2}{9}) \cdot \frac{9}{2}] \cdot 1\frac{1}{4} = -1\frac{1}{4}$ $\frac{7}{3} \cdot (\frac{3}{7} - \frac{1}{3}) = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} - \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$

2. FLÄCHENINHALT UND VOLUMEN

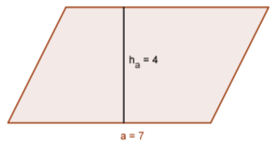
2.1 Flächeninhalte

Flächeninhalt von Parallelogrammen

Beim Parallelogramm wird der Abstand der zwei parallelen Seiten als Höhe bezeichnet.

Beim Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt: $A = a*h_a = b*h_b$

Bei sich in einer Seite und der dazugehörigen Höhe übereinstimmenden Parallelogrammen handelt es sich um gleiche Flächeninhalte.



Flächeninhalt:

$A = 8\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 24\text{ cm}^2$

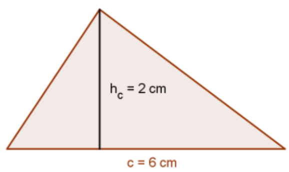
Flächeninhalt von Dreiecken

Die Länge des Lots zwischen einer Ecke und der gegen-überliegenden Seite wird als Höhe im Dreieck bezeichnet. Es gibt in jedem Dreieck drei Höhen.

Beim Flächeninhalt des Dreiecks gilt:

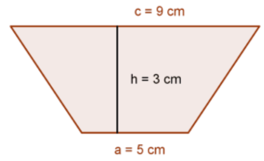
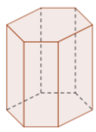
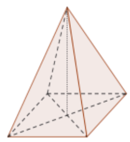
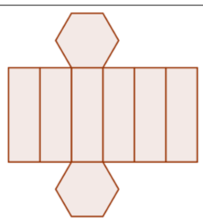
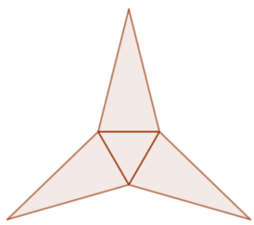
$$\mathbf{A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b}$$

Dreiecke, die in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, haben den gleichen Flächeninhalt.



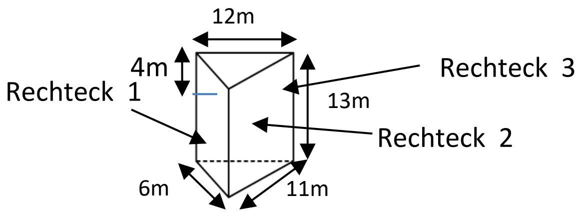
Flächeninhalt:

$A = \frac{1}{2} \cdot 8\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 8\text{ cm}^2$

Flächeninhalt von Trapezen Ein Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten wird als Trapez bezeichnet. Dabei bezeichnet man den Abstand der zueinander parallelen Seiten als Höhe des Trapezes. Die beiden anderen Seiten werden Schenkel des Trapezes genannt. Beim Flächeninhalt des Trapezes gilt: $\mathbf{A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h}$	 Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot (5\text{ cm} + 9\text{ cm}) \cdot 4\text{ cm} = 28\text{ cm}^2$
Schrägbilder Um die räumliche Vorstellung eines Körpers zu verbessern, fertigt man von ihm ein Schrägbild an. Meist ist es hilfreich, zunächst ein Schrägbild eines Quaders zu zeichnen, aus dem sich dann das Schrägbild eines anderen Körpers entwickeln lässt.	  Prisma Pyramide
Netze Beim längs Aufschneiden der Oberfläche eines Körpers an geeigneten Kanten und Ausgebreiten in der Zeichenebene, erhält man ein Netz des Körpers.	 

Oberflächeninhalt

Der Oberflächeninhalt O eines Körpers gleicht dem Flächeninhalt seines Netzes.



Oberflächeninhalt:

$O = 2 \cdot O_{Dreiecke} + O_{Rechteck1} + O_{Rechteck2} + O_{Rechteck3}$

$= 2 \cdot 1/2 \cdot 12m \cdot 4m + 6m \cdot 13m + 11m \cdot 13m + 12m \cdot 13m$

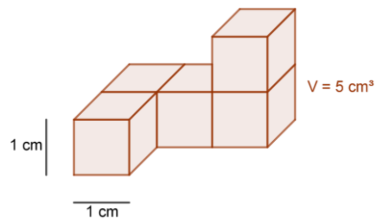
$= 425m^2$

2.2 VOLUMEN UND VOLUMENMESSUNG

Volumen

Das Volumen V gibt den Raum an, den der Gegenstand einnimmt.

$V = 5\ cm^3$ ist das fünffache Volumen eines Zentimeterwürfels



Volumeneinheiten

Zur Volumenmessung verwenden wir Würfel mit den Kantenlängen 1 mm, 1cm, 1dm oder 1m.

Sie haben die Volumina $1mm^3$, $1cm^3$, $1dm^3$ oder $1m^3$.

Für Umrechnungen gilt:

$1m^3 = 1000dm^3$,

$1dm^3 = 1000cm^3$

$1cm^3 = 1000mm^3$

$20.000\ mm^3 = 20\ cm^3 = 0{,}020\ dm^3$

$215\ dm^3\ 50\ cm^3 = 215{,}050\ dm^3$

$= 215.050\ cm^3$

$= 0{,}215050\ m^3$

Flüssigkeitsmengen werden oft in den Einheiten ml, l und hl gemessen.

50 hl = 5000 l = 5000 dm^3 = 5 m^3

7200 cm^3 = 7200 ml = 7,2 l

<table>
<tr>
<td>

Es gilt: 1 l = 1 dm^3

1 hl =100 l und

1 ml = $\frac{1}{100}$ l = 1 cm^3

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

Volumen des Quaders

Für Quader gilt:

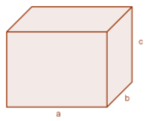
V = a · b · c

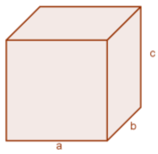
Für Würfel gilt:

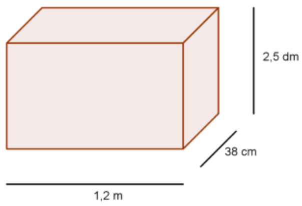
V = a · a · a = a^3

Man muss zunächst die Länge, die Breite und die Höhe des Quaders in der gleichen Einheit angeben.

</td>
<td>







Volumen V= 1,2 m · 38 cm · 2,5 dm

= 1,2 m · 0,38 m · 0,25 m

= (1,2 · 0,38· 0,25) m^3

= 0,114 m^3 = 114 dm^3

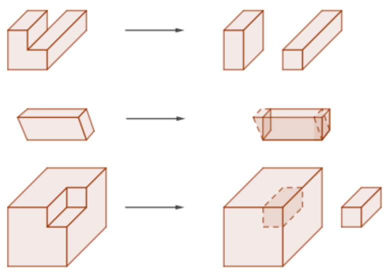
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Volumen verschiedener Körper

Das Volumen eines Körpers lässt sich rechnerisch bestimmen, indem das Volumen dieses Körpers auf das Volumen eines Quaders zurückgeführt wird. Z.B. indem der Körper

- in Quader zerlegt wird
- geeignet zerlegt und neu zu einem Quader zusammengesetzt wird
- durch Hinzufügen von Quadern zu einem Quader ergänzt wird

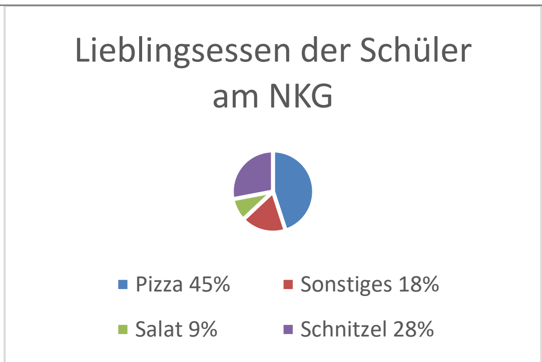
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Körper, deren Volumen sich nicht auf eine dieser Weisen bestimmen lässt, können wir unter Verwendung von Quadern näherungsweise bestimmen.	

3. PROZENTRECHNUNG, DATEN UND DIAGRAMME

Prozentbegriff Prozent ist eine andere Bezeichnung für Hundertstel. Die Prozentschreibweise wird häufig zum anschaulichen Vergleich von Anteilen verwendet. Kleinere Anteile werden auch in Promille (= Tausendstel) angegeben.	60% = 0,6 3% = 0,03 100% = 1 8‰ = 0,008
Darstellung von Prozentangaben im Kreisdiagramm In Prozent angegebene Aufteilungen eines Ganzen lassen sich in einem Kreisdiagramm geeignet veranschaulichen.	
Grundgleichung der Prozentrechnung Prozentsatz von Grundwert ist Prozentwert **Ps · GW = PW**	40% · 250 € = 100 €
Berechnung des Prozentwertes	36% · 350 m = 0,36 · 350 m = 126 m

Zur Berechnung des Prozentwertes wird der Prozentsatz mit dem Grundwert multipliziert.	
Berechnung des Prozentsatzes Zur Berechnung des Prozentsatzes wird der Prozentwert durch den Grundwert dividiert.	Wie viel % von 35 sind 30? 30 : 35 = 0,8751… ≈ 85,75% Also: 85,7% · 35 = 30

Berechnung des Grundwertes

Zur Berechnung des Grundwertes wird entweder der Prozentwert durch den Prozentsatz dividiert.
Oder es wird mit einem Dreisatz auf einen günstigen Prozentsatz „hinunter-“ und anschließend auf 100% „hinaufgerechnet“.

	Prozentsatz	Betrag	
	30%	270€	
: 3			: 3
	10%	90€	
· 10			· 10
	100%	900€	

Der Grundwert als Bezugsbegriff

Entscheidend für den korrekten Umgang mit Prozentangaben ist es, den richtigen Bezugswert (den Grundwert) zu erkennen.

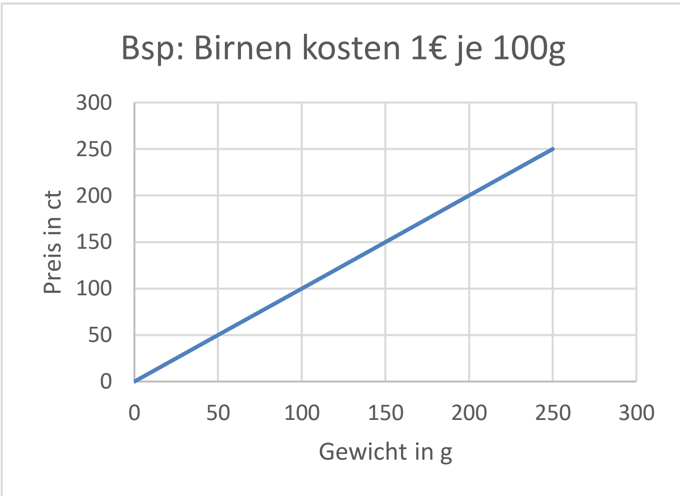
50 ist um 25% größer als 40 (Grundwert).

aber:

40 ist um 20% kleiner als 50 (Grundwert).

Darstellung des Zusammenhangs zwischen Größen

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen kann in einem Diagramm übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird an jeder Koordinatenachse eine Größe angetragen. Jeder Punkt beschreibt mit seinen Koordinaten einen Wert der einen Größe und den dazu gehörigen Wert der anderen Größe.



RELATIVE HÄUFIGKEIT

Erkennungsmerkmale eines Zufallsexperiments Die möglichen Ergebnisse bei der Durchführung des Experimentes sind vorher bekannt. Welches Ergebnis bei der Durchführung des Experimentes auftreten wird, ist nicht hervorsagbar.	  **Zufall oder nicht?**
Absolute Häufigkeit Die absolute Häufigkeit eines Ergebnisses beschreibt, wie oft es bei mehrfacher Ausführung des Zufallsexperimentes eintritt.	Bei einer Umfrage „Mögen Sie Fußball?“ antworten 27 von 90 Personen mit „Nein“. Absolute Häufigkeit von „Nein“: 27
Relative Häufigkeit Die relative Häufigkeit gibt den Bruchteil eines ganz bestimmten Ergebnisses geteilt durch die Gesamtzahl der Durchführungen des Zufallsexperimentes an. Relative Häufigkeit $= \frac{\text{Absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$	Relative Häufigkeit von „Nein“: $\frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\,\%$
Empirisches Gesetz der großen Zahlen Je öfter man ein Zufallsexperiment durchführt, desto mehr stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines einzelnen Ergebnisses. Diese Bruchzahl ist ein guter Näherungswert für die tatsächliche Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses	