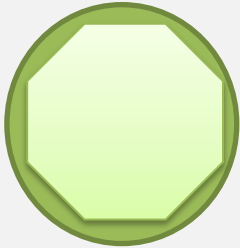
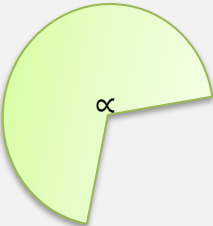
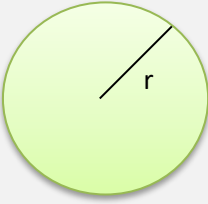
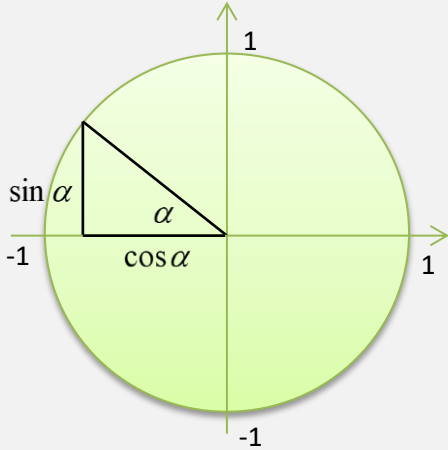
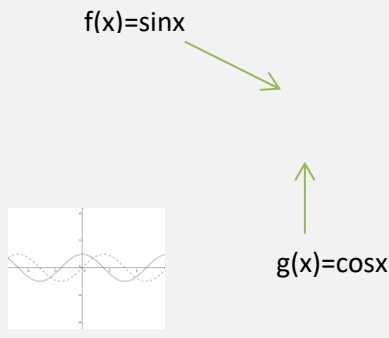
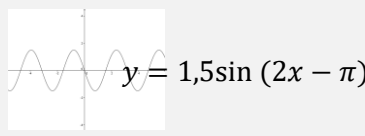


# Mathematik-Grundwissen - Klassenstufe 10

THEORIE	BEISPIEL
<p><b>Die Kreiszahl <math>\pi</math></b></p> <p><math>\pi</math> ist eine irrationale Zahl. Man kann durch verschiedene Verfahren Näherungswerte bestimmen. Beispielsweise lässt sich der Wert des Kreisumfangs durch Berechnung des Umfangs von Vielecken einschachteln und damit <math>\pi</math> angeben.</p>	<p><math>\pi = 3,1415926535897\dots</math></p> 
<p><b>Kreisektor</b></p> <p>Kreis mit Radius <math>r</math> und Mittelpunktswinkel <math>\alpha</math>:</p> <p>Länge des Kreisbogens:</p> $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ <p>Flächeninhalt des Kreissektors:</p> $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} br$	 <p><math>r = 4 \text{ cm}</math> <math>\alpha = 255^\circ</math></p> $b = \frac{255^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 4 \text{ cm}$ $\approx 17,8 \text{ cm}$ $A = \frac{255^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 16 \text{ cm}^2$ $\approx 35,6 \text{ cm}^2$
<p><b>Bogenmaß</b></p> <p>Der Winkel <math>\alpha</math> kann im Gradmaß oder im Bogenmaß angegeben werden.</p> <p>Für den Zusammenhang von Gradmaß und Bogenmaß gilt:</p> $\frac{b}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$	<p><math>2\pi</math> entspricht <math>360^\circ</math> bzw. <math>\pi</math> entspricht <math>180^\circ</math></p> <p><math>60^\circ</math> im Bogenmaß: <math>\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} \approx 1,05</math></p> <p><math>0,52</math> im Gradmaß: <math>\frac{0,52}{2\pi} \cdot 360^\circ \approx 30^\circ</math></p>
<p><b>Volumen der Kugel</b></p> <p>Ist <math>r</math> der Radius einer Kugel, so gilt für das Volumen:</p> $V = \frac{4}{3} \pi r^3$	 <p><math>r = 5 \text{ cm}</math></p> $V = \frac{4}{3} \pi \cdot (5 \text{ cm})^3$ $V = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$ $V \approx 524 \text{ cm}^3$
<p><b>Oberflächeninhalt der Kugel</b></p> <p>Ist <math>r</math> der Radius einer Kugel, so gilt für den Oberflächeninhalt:</p> $O = 4\pi r^2$	$O = 4\pi \cdot (5 \text{ cm})^2$ $O = 100\pi \text{ cm}^2$ $O \approx 314 \text{ cm}^2$

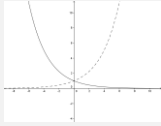
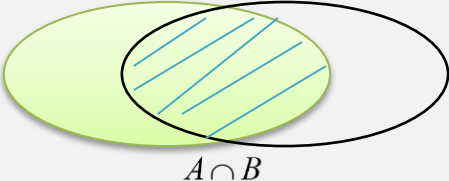
# Mathematik-Grundwissen - Klassenstufe 10

<p><b>Sinus und Kosinus am Einheitskreis</b></p> <p><math>\sin \alpha = y; \cos \alpha = x</math>            Hier ist P (x y) ein beliebiger Punkt auf dem Einheitskreis.</p> <p>Die Sinuswerte/Kosinuswerte haben für den spitzen Winkel <math>\alpha</math> sowie für die Winkel <math>180^\circ - \alpha</math>, <math>180^\circ + \alpha</math> und <math>360^\circ - \alpha</math> den gleichen Betrag. Das Vorzeichen lässt sich jeweils aus der Darstellung entnehmen.</p>	<p><math>\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}</math>  <math>\sin 210^\circ = \sin 330^\circ = -\frac{1}{2}</math></p> 
<p><b>Die trigonometrischen Funktionen in <math>\mathbb{R}</math></b></p> <p><math>\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x</math> und  <math>\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x</math></p> <p>Für alle <math>x</math> mit <math>0 \leq x \leq 2\pi</math> und alle <math>k \in \mathbb{Z}</math> sind die Sinus- und Kosinusfunktion für alle reellen Zahlen definiert. Dabei bestimmt <math>x</math> das Bogenmaß des Winkels.</p> <p>Die Sinus- und Kosinusfunktion sind periodisch mit <math>2\pi</math>, die Wertemenge ist <math>W = [-1; 1]</math>.</p>	<p><math>f(x) = \sin x</math></p>  <p><math>g(x) = \cos x</math></p>
<p><b>Die allgemeine Sinusfunktion</b></p> <p><math>x \rightarrow a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]</math></p> <p>Mit <math>x \in \mathbb{R}, a \neq 0</math> und <math>b &gt; 0</math>.            Bei geeigneter Wahl von <math>a, b, c</math> lassen sich beliebige sinusförmige Graphen beschreiben. Dabei bestimmt <math>c &gt; 0</math> (<math>c &lt; 0</math>) eine Verschiebung der Sinuskurve in <math>x</math>-Richtung nach links(bzw. rechts) um <math>\frac{c}{b}</math>. Die Amplitude ist durch <math> a </math>, die Periode durch <math>\frac{2\pi}{b}</math> angegeben.  <math>a \leq 0</math> bringt eine Spiegelung an der <math>x</math>-Achse hinzu.</p>	 <p><math>y = 1,5 \sin(2x - \pi)</math></p>

# Mathematik-Grundwissen - Klassenstufe 10

<p><b>Sinus- und Kosinussatz</b></p> <p>Zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks ABC bestehen diese Beziehungen...:</p>	<p>Gegeben:  <math>b = 8\text{cm}; c = 5\text{cm}; \gamma = 35^\circ</math></p> $\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \gamma}{c} = \frac{8\text{cm} \cdot \sin 35^\circ}{5\text{cm}}$ $\Rightarrow \beta_1 \approx 66,6^\circ; \beta_2 = 113,4^\circ$										
<p><b>Sinussatz</b></p> <p>Die Längen zweier Seiten sind vom Verhältnis wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel:</p> $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$											
<p><b>Kosinussatz</b></p> <p>Für jede Dreiecksseite, deren Gegenwinkel und dessen anliegende Seiten gilt:</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$	<p>Gegeben: <math>a = 6\text{cm}; b = 7\text{cm}; c = 4\text{cm}</math></p> $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{29}{56}$ $\Rightarrow \alpha \approx 58,8^\circ$										
<p><b>Lineares Wachstum</b></p> <p><math>d = f(t) - f(t-1)</math> ist ein lineares Wachstum. <math>d</math> ist die <b>absolute Änderung</b> pro Zeitschritt.</p> <p>Es gilt:</p> $f(t) = f(t-1) + d \quad (\text{schrittweise})$ $f(t) = f(0) + t \cdot d \quad (\text{direkt})$	<p>Lineares Wachstum mit der absoluten Änderung <math>d = 4</math> und <math>f(0) = 3</math>:</p> <table border="1" data-bbox="810 1279 1315 1352"> <tbody> <tr> <td>t</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>f(t)</td> <td>3</td> <td>7</td> <td>11</td> <td>15</td> </tr> </tbody> </table> $f(t) = f(t-1) + 4$ $f(t) = 3 + 4t$	t	0	1	2	3	f(t)	3	7	11	15
t	0	1	2	3							
f(t)	3	7	11	15							
<p><b>Exponentielles Wachstum</b></p> <p><math>a = \frac{g(t)}{g(t-1)}</math> heißt exponentielles Wachstum.</p> <p><math>a - 1 = \frac{g(t) - g(t-1)}{g(t-1)}</math> bezeichnet die relative (prozentuale) Änderung pro Zeitschritt.</p> <p>Es gilt:</p> $g(t) = g(t-1) \cdot a \quad (\text{schrittweise})$ $g(t) = g(0) \cdot a^t \quad (\text{direkt})$	<p>Exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor <math>a = 1,5</math> und <math>f(0) = 4</math>:</p> <table border="1" data-bbox="810 1731 1315 1805"> <tbody> <tr> <td>t</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>f(t)</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>13,5</td> </tr> </tbody> </table> $f(t) = f(t-1) \cdot 1,5$ $f(t) = 4 \cdot 1,5^t$	t	0	1	2	3	f(t)	4	6	9	13,5
t	0	1	2	3							
f(t)	4	6	9	13,5							

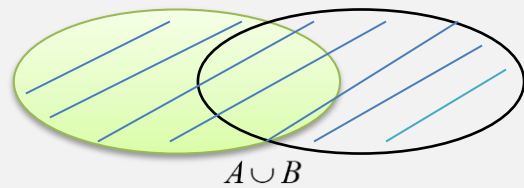
# Mathematik-Grundwissen - Klassenstufe 10

<p><b>Halbwertszeit <math>T_H</math> (Verdopplungszeit <math>T_D</math>)</b></p> <p>Bezeichnet die Zeit, in der sich der Funktionswert jeweils halbiert bzw. verdoppelt.</p>	
<p><b>Exponentialfunktionen</b></p> <p><math>x \rightarrow b \cdot a^x</math> mit <math>a &gt; 0</math> und <math>a \neq 1</math> nennt man Exponentialfunktionen. Die Funktionswerte sind immer positiv. Der Graph geht durch den Punkt <math>(0/b)</math>. Die x-Achse ist Asymptote.</p> <p>Der Graph von <math>x \rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x</math> geht aus dem Graphen von <math>x \rightarrow a^x</math> durch Spiegelung an der y-Achse hervor.</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math>x \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x</math> </div> </div> 
<p><b>Logarithmen</b></p> <p>Die Lösung der Exponentialgleichung <math>a^x = b</math> (für <math>a &gt; 0, b &gt; 0</math>) ist der Logarithmus von b zur Basis a: <math>x = \log_a b</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>\log_3 243 = 5;</math> denn: <math>3^5 = 243</math></p>
<p><b>Gesetze für das Rechnen mit Logarithmen</b></p> <p><math>\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v</math>  <math>\log_a (u : v) = \log_a u - \log_a v</math>  <math>\log_a u^x = x \cdot \log_a u</math></p> <p>Umrechnungsformel: <math>\log_a u = \frac{\lg u}{\lg a}</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>\lg(5x) = \lg 5 + \lg x</math>  <math>\lg(5 : x) = \lg 5 - \lg x</math>  <math>\lg 2^{1000} = 1000 \cdot \lg 2</math>  <math>\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2}</math></p>
<p><b><u>Wahrscheinlichkeitsrechnung</u></b></p> <p><b>g</b></p> <p><b>Schnittmenge</b></p> <p>Die <b>Schnittmenge</b> <math>A \cap B</math> zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die zur Menge A und gleichzeitig zur Menge B gehören.</p>	

# Mathematik-Grundwissen - Klassenstufe 10

## Vereinigungsmenge

Die **Vereinigungsmenge**  $A \cup B$  zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die zur Menge A oder zur Menge B gehören.



## Vierfeldertafel

Die Ereignisse A und B ermöglichen eine Zerlegung der Ergebnismenge  $\Omega$  in vier Teilmengen:

$$A \cap B, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B} \text{ und } \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Jedes Ergebnis  $\omega$  gehört dabei einer Teilmenge an.

Trägt man die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A \cap B, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}$  ein, so treten die Wahrscheinlichkeiten von  $A, \bar{A}, B, \bar{B}$  als Spalten- bzw. Zeilensummen auf.

Jede Vierfeldertafel ist Ausgangspunkt zweier Baumdiagramme. Entweder wird in der 1. Stufe nach A und  $\bar{A}$  und in der 2. Stufe nach B und  $\bar{B}$  unterschieden oder umgekehrt.

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = 30\%$	$P(A \cap \bar{B}) = 25\%$	
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = 10\%$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 35\%$	
	$P(B) = 40\%$	$P(\bar{B}) = 60\%$	

$$P(A) = 55\%$$

$$P(\bar{A}) = 45\%$$

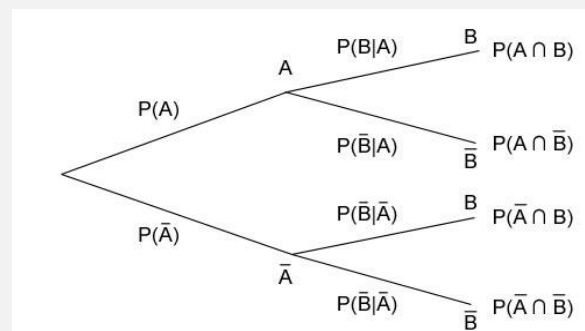
$$P(\Omega) = 100\%$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit

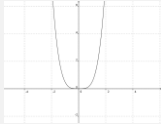
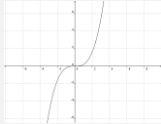
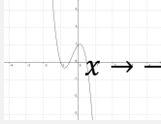
Sind A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit  $P(A) \neq 0$  so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P_A(B)$  die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B unter der Bedingung des Eintretens von A.

$$\text{Es gilt: } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A)$$

Im Baumdiagramm kann die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P_A(B)$  unmittelbar abgelesen werden, jedoch nicht die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P_B(A)$ . Diese kann mit einer aus dem Baumdiagramm entwickelten Vierfeldertafel ermittelt werden. Häufig ist es dabei übersichtlicher, zunächst mit Anzahlen und anschließend mit Wahrscheinlichkeiten zu arbeiten.



# Mathematik-Grundwissen - Klassenstufe 10

<p><b>Potenzfunktionen</b></p> <p>Funktionen: <math>x \rightarrow a \cdot x^n (n \in \mathbb{N})</math></p> <p>Gerade Exponenten:</p> $a > 0: W = \mathcal{R}_0^+$ $a < 0: W = \mathcal{R}_0^-$ <ul style="list-style-type: none"> <li>- achsensymmetrisch bzgl. y-Achse.</li> </ul> <p>Ungerade Exponenten:</p> $a > 0: W = \mathbb{R}$ $a < 0: W = \mathbb{R}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>- punktsymmetrisch bzgl. Koordinatenursprung.</li> </ul>	 <p><math>x \rightarrow 0,5x^4</math></p>  <p><math>x \rightarrow 0,2x^3</math></p>
<p><b>Polynome</b></p> <p>Polynom: Term aus Summen von gleichen Variablen mit zugehörigen Koeffizienten. Der höchste Exponent heißt Grad des Polynoms.</p>	<p>Polynom: <math>2x^7 - 5x^4 + x^2 - 3</math>          Koeffizienten: <math>a_7 = 2; a_6 = a_5 = 0;</math>  <math>a_4 = -5; a_3 = 0; a_2 = 1; a_1 = 0; a_0 = -3</math>          Grad des Polynoms: 7</p>
<p><b>Ganzrationale Funktionen</b></p> <p>Eine Funktion mit einem Polynom als Funktionsterm heißt auch ganzrationale Funktion.</p>	<p><math>f(x) = -4x^3 - 4x^2 + x + 1</math>; Grad von f: 3</p>
<p><b>Eigenschaften ganzrationaler Funktionen</b></p> <p>Der Summand mit dem höchsten vorkommenden Exponenten bestimmt das Verhalten einer ganzrationalen Funktion.</p> <p>Ist a eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f vom Grad n, dann lässt sich f(x) in der Form</p> $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$ <p>schreiben.          g(x) erhält man durch Polynomdivision:  <math display="block">g(x) = f(x) : (x - a)</math></p> <p>Grad n bedeutet höchstens n Nullstellen.</p>	<p><math>-4x^3</math> bestimmt das Verhalten des Graphen für betragsmäßig große x-Werte.</p>  <p><math>x \rightarrow -4x^3 - 4x^2 + x +</math></p>

# Mathematik-Grundwissen - Klassenstufe 10

k-fache Nullstelle bei  $x = a$ , wenn  $x - a$  in der faktorisierten Form k-mal vorkommt.

## Verschieben von Funktionsgraphen

$g(x) = f(x + a) + b$  bedeutet, dass g aus dem Graphen von f durch Verschiebung um  $-a$  in x-Richtung und um b in y-Richtung entsteht.



Beispiel:

Verschiebung nach rechts um 2 so wie nach oben um 2

Links:  $f(x) = x^3$

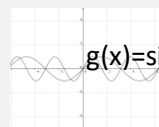
Rechts:  $g(x) = (x - 2)^3 + 2$

## Strecken von Funktionsgraphen

$g(x) = k \cdot f(x)$  bedeutet, dass g gegenüber f in y-Richtung mit dem Streckungsfaktor k gestreckt ist.

$h(x) = f(kx)$  bedeutet, dass h gegenüber f in x-Richtung mit dem Streckungsfaktor k gestreckt ist.

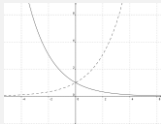
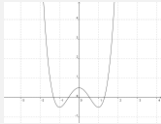
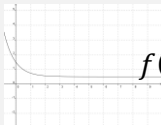
$f(x) = \sin x$



$g(x) = \sin(2x)$



# Mathematik-Grundwissen - Klassenstufe 10

<p><b>Spiegeln von Funktionsgraphen</b></p> <p><math>g(x) = -f(x)</math> bedeutet, dass g durch Spiegelung an der x-Achse aus f hervorgeht.</p> <p><math>h(x) = f(-x)</math> bedeutet, dass h durch Spiegelung an der y-Achse aus f hervorgeht.</p>	<p><math>f(x) = e^{-x}</math></p> <p><math>g(x) = e^x</math></p> 
<p><b>Symmetrie von Funktionsgraphen</b></p> <p>Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse:</p> $f(-x) = f(x)$ <p>Punktsymmetrie bzgl. des Koordinatenursprungs:</p> $f(-x) = -f(x)$ <p>Kommen im Funktionsterm nur x-Potenzen mit geraden/ungeraden Exponenten vor, so ist der Graph achsensymmetrisch/punktsymmetrisch.</p>	<p><math>f(x) = x^4 - 2x^2 + 0,5</math></p> 
<p><b>Grenzwerte im Unendlichen</b></p> <p>a ist ein Grenzwert der Funktion f, wenn die Funktionswerte von f für beliebig groß werdende x-Werte der Zahl a beliebig nahe kommen.</p> <p>Schreibweise: <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a</math></p>	 <p><math>f(x) = e^{-x} + 0,5,</math></p> <p><math>\lim f(x) = 0,5</math></p> <p>für <math>x \rightarrow \infty</math></p>

## Empfehlenswerte Internet-Links

Hier findet ihr weitere Aufgaben und Erklärungen:

[www.strobl-f.de](http://www.strobl-f.de)

[www.zum.de/mathematik-digital](http://www.zum.de/mathematik-digital)

[www.smart.uni-bayreuth.de](http://www.smart.uni-bayreuth.de)

[www.mathegym.de](http://www.mathegym.de)