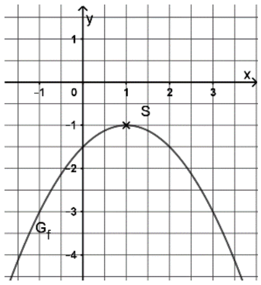
Grundwissen der 9. Jahrgangsstufe (G-8) in Mathematik

„In der Jahrgangsstufe 9 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:

- Sie sind sich der Notwendigkeit von Zahlenbereichserweiterungen bewusst und können mit Wurzeln und Potenzen umgehen.
- Sie können mit quadratischen Funktionen und deren Graphen sicher umgehen und quadratische Gleichungen sicher lösen.
- Sie können die Aussage des Satzes von Pythagoras erläutern und sicher anwenden.
- Sie kennen die trigonometrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck und können diese auch bei praxisbezogenen Fragestellungen anwenden.
- Sie können den Rauminhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder und Kegel bestimmen.
- Sie erkennen elementare Grundfiguren wie Stützdreiecke in räumlichen Objekten.
- Sie können mehrstufige Zufallsprozesse beschreiben und Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln berechnen.
- Sie sind sich der Notwendigkeit von Begründungen bewusst.“

Wissen und Können	Beispiele
Funktionen *Quadratische Funktionen und ihre Graphen* $f: x \mapsto \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c;\ a \neq 0$ - Öffnung der Parabel: a$\begin{cases} > 0\text{: nach oben geöffnet} \\ < 0\text{: nach unten geöffnet} \end{cases}$ - Weite der Parabel: $\lvert a \rvert \begin{cases} < 1\text{: breiter als Normalparabel} \\ > 1\text{:schmaler als Normalparabel} \end{cases}$ - Scheitelform: $y = a(x - x_s)^2 + y_s \leftrightarrow S(x_s \lvert y_s)$	Aussagen über den Graph der Parabel f mit $f: x \mapsto -0{,}5x^2 + x - 1{,}5$  $a < 0$: Parabel nach unten geöffnet ($a = -0{,}5$) $\lvert a \rvert < 1$: Parabel weiter als die Normalparabel ($\lvert a \rvert = 0{,}5$) $y = -0{,}5(x - 1)^2 - 1$ $\leftrightarrow S(1 \mid -1)$
Reelle Zahlen ℝ - Irrationale Zahlen (unendliche, nichtperiodische Dezimalbruchdarstellung) gehören nicht zu Q. - Es gilt: $N \subset Z \subset Q \subset R$ **Quadratwurzeln** $\sqrt{a}$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. $\sqrt{a}$ heißt Quadratwurzel; a heißt Radikand. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ - Rechengesetze für Quadratwurzeln: a) Betragsregel: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ b) Multiplikationsregel: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{\mathrm{ab}}$ c) Divisionsregel: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ d) Teilweises Radizieren $\sqrt{a^2 b} = \lvert a \rvert \sqrt{b}$ **Der Betrag**: Def.:$\lvert x \rvert = \begin{cases} x\text{, wenn } x \geq 0 \\ -x\text{, wenn } x < 0 \end{cases}$	irrat. Zahlen: 1,2345678910111213...; $\pi = 3{,}1415$... $\pi \notin Q;\ 1{,}32 \notin Z;\ -7 \notin N$ $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5\ ;\ \text{denn}(1{,}5)^2 = 2{,}25$ und $\left(\sqrt{2{,}25}\right)^2 = 2{,}25$ a) $\sqrt{(-5)^2} = \lvert -5 \rvert = 5$ b)$\sqrt{7a}\sqrt{7a^3} = \sqrt{49a^4} = 7a^2$ c)$\frac{\sqrt{12a^3}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{12a^3}{3a}} = \sqrt{4a^2} = 2\lvert a \rvert$ d)$\sqrt{50a^3b^2} = \sqrt{5^2a^2b^2 2a} = 5\lvert \mathrm{ab} \rvert \sqrt{2a}$ $\lvert -1{,}5x + 3 \rvert = \begin{cases} -1{,}5x + 3, wenn\ x < 2 \\ 1{,}5x - 3, wenn\ x \geq 2 \end{cases}$
n-te Wurzeln Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. $\sqrt[n]{a}$ heißt n-te Wurzel aus a. **n** heißt Wurzelexponent (n∈N; n>1); a heißt Radikand.	Vereinfache ohne Taschenrechner: $\sqrt[4]{49^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{49^2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{7^4}} = \left(\frac{1}{7^4}\right)^{\frac{1}{4}} = 7^{(-4)\cdot\frac{1}{4}} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$ Bestimme die Lösungsmenge zu $x^4 = 81$; $x = \sqrt[4]{81}$ oder $x = -\sqrt[4]{81}$ $x = 3$ oder $x = -3$ $L = \{-3;\ 3\}$

Potenzen mit rationalen Exponenten

Für positive Grundzahlen a gilt: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ und $a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ $(p \in Z;\ q \in N)$

Potenzgesetze

Sind r und s rationale Zahlen und a und b positive reelle Zahlen, so gilt für

Potenzen mit gleicher Basis:	$a^r \cdot b^s$	$=$	a^{r+s}	und	$a^r : b^s$	$=$	a^{r-s}
Potenzen mit gleichem Exponenten:	$a^r \cdot b^r$	$=$	$(a \cdot b)^r$	und	$a^r : b^r$	$=$	$(a : b)^r$
Potenzen von Potenzen:	$(a^r)^s$	$=$	$a^{r \cdot s}$				

Quadratische Gleichungen

- „Mitternachtsformel":

$ax^2 + bx + c = 0$ hat Lös. $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; a \neq 0$

- Anzahl der Lösungen abhängig von der

Diskriminante: $b^2 - 4ac \begin{cases} > 0: 2 \text{ Lösungen} \\ = 0: 1 \text{ Lösung} \\ < 0: \text{keine Lös.} \end{cases}$

$$x^2 + x - 2 = 0\ ;\ x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = -2$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

a) Ermittle die Nullstellen der Parabel:

$$f(x) = x^2 - 2{,}2x + 1{,}21$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x^2 - 2{,}2x + 1{,}21 &= 0 \\ (x - 1{,}1)^2 &= 0 \\ x - 1{,}1 &= 0 \\ x &= 1{,}1 \end{aligned}$$

b) Schreibe ohne Wurzel: $\sqrt{\frac{4}{9}x^2 + y^2 + \frac{4}{3}xy}$

Lösung: $\sqrt{\frac{4}{9}x^2 + y^2 + \frac{4}{3}xy} =$

$\sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}xy + y^2} = \sqrt{(\frac{2}{3}x + y)^2} = \left|\frac{2}{3}x + y\right|$

Schnittprobleme

Die Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen bestimmt man rechnerisch, indem man die Funktionsterme gleichsetzt. Jede Lösung der Gleichung liefert die x-Koordinate eines Schnittpunktes. Die y-Koordinate erhält man durch Einsetzen der x-Koordinate in einen der beiden Funktionsterme.

Bestimme die Koordinaten aller Schnittpunkte der Funktionen f und g.

$f(x) = \frac{1}{x}\ D_f = R \setminus \{0\};\ g(x) = x - 1{,}5$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= x - 1{,}5 \quad |\cdot x \\ 1 &= x^2 - 1{,}5x \quad |-1 \\ 0 &= x^2 - 1{,}5x - 1 \end{aligned}$$

Mit der „Mitternachtsformel (siehe oben) ergibt sich:
$x_1 = -0{,}5$ und $x_2 = 2$; Einsetzen in f (oder g) ergibt:
$S_1(-0{,}5|-2)$ und $S_2(2|0{,}5)$

Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Lösung durch Rückführung auf ein LGS mit zwei Variablen.

1. Löse eine der drei Gleichungen nach einer Variablen auf.
2. Eliminiere diese Variable aus den beiden anderen Gleichungen durch Einsetzen.
3. Diese beiden Gleichungen bilden ein LGS mit zwei Variablen, (Einsetzungs- oder Additionsverfahren, Lösung siehe 8. Jgst.)

Sonderfälle:

a) Nicht lösbares LGS: es tritt ein Widerspruch auf

b) Unendlich viele Lösungen: eine Variable ist frei wählbar.

Löse das LGS:

$$\begin{array}{lllll} I\ 3x & +2y & +z & = & 7 \\ II\ x & & -y & +2z & = 4 \\ III\ -2x & +y & -3z & = & -7 \end{array}$$

1. aus II: $y = x + 2z - 4$

2. in I: $3x + 2(x + 2z - 4) + z = 7$

$5x + 5z = 15$

$x + z = 3$

$x = 3 - z$

y in III: $-2x + (x + 2z-4)-3z = -7$

$-x - z = -3$

$x = -z+3$

Nicht lösbares LGS: L = { }

Unendlich viele Lösungen:

$$\begin{array}{lllll} I\ x & +2y & +3z & = & 5 \\ II\ 2x & +3y & +5z & = & 8 \\ III\ 3x & -y & +2z & = & 1 \end{array}$$

2*I-II : y+z=2 y=2-z

in III: x=1-z

x ,y in II: 8=8

L = $\{(x|y|z)\ |y = 2 - z;\ x = 1 - z\}$;

z. B. ist $(1|2|0)$, aber auch $(-2|-1|3)$Lösung.

Satzgruppe des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt:

Satz des Pythagoras:

Die Quadrate über den Katheten a und b haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse c.

$a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz:

Das Quadrat über der Höhe h hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten p und q.

$h^2 = p \cdot q$

Kathetensatz:

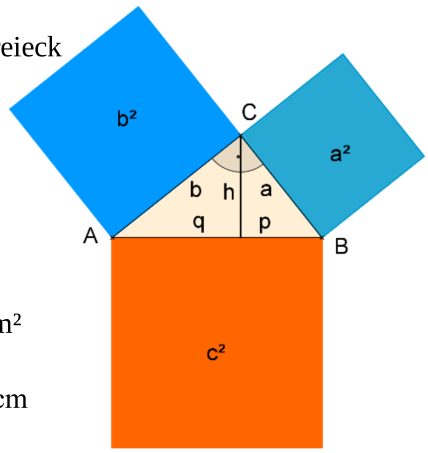
Das Quadrat über einer Kathete hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse c und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$a^2 = c \cdot p$

$b^2 = c \cdot q$

Gegeben:
Rechtwinkliges Dreieck mit a = 5 cm und c = 8 cm.

Gesucht:
b, p, q und h



$b^2 = c^2 - a^2 = 39\ cm^2$ (Pythagoras)

$b = \sqrt{39}cm \approx 6{,}2$ cm

$p = a^2 : c = 25\ cm^2 : 8\ cm = 3{,}125$ cm (Kathetensatz)

$q = c - p = 4{,}875$ cm

$h^2 = p \cdot q \approx 15{,}2$ cm (Höhensatz)

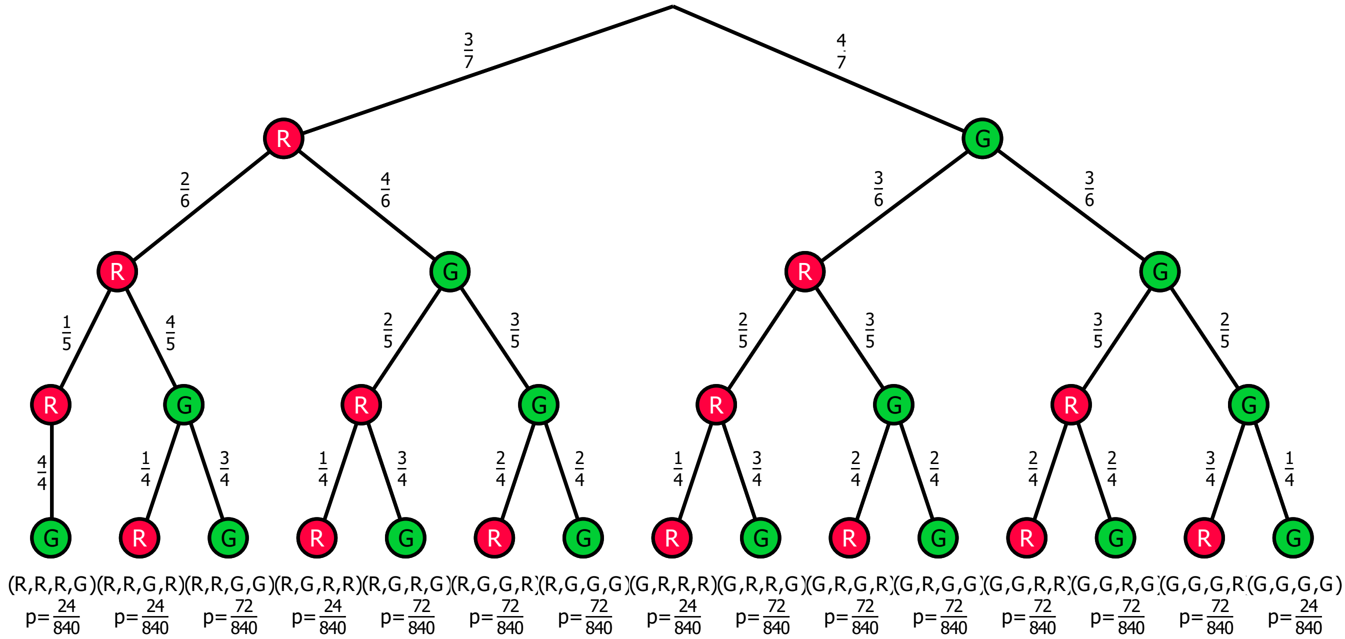
$h \approx 3{,}9$ cm

Mehrstufige Zufallsexperimente

<u>1. Pfadregel</u>

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.

2. Pfadregel	Aufgabe Urne:
Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade bildet, die zu dem Ereignis gehören.	*Aus einer Urne mit 3 roten und 4 grünen Kugeln werden nacheinander vier Kugeln gezogen. Zeichne ein Baumdiagramm und gib alle zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.*



Baumdiagramm zur Aufgabe Urne.

Trigonometrie

Im rechtwinkligen Dreieck legt man fest:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

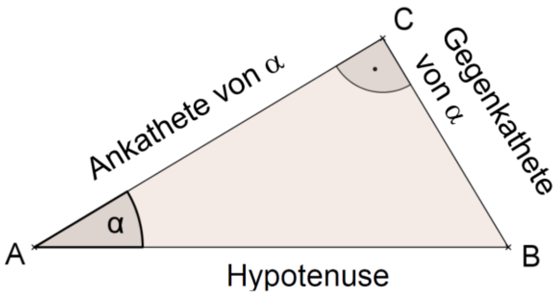
$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens:

(1) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

(2) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

(3) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



Gegeben: Hypotenuse c = 8,5 cm und α = 41°
Gesucht: β, a und b

β = 90° – α = 90° – 41° = 49°
a = c · sin α = 8,5 cm · sin 41° ≈ 5,6 cm
b = c · cos α = 8,5 cm · cos 41° ≈ 6,4 cm

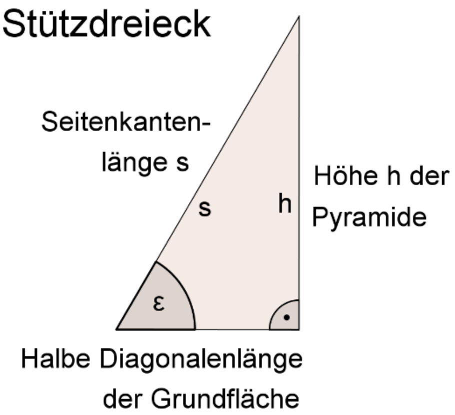
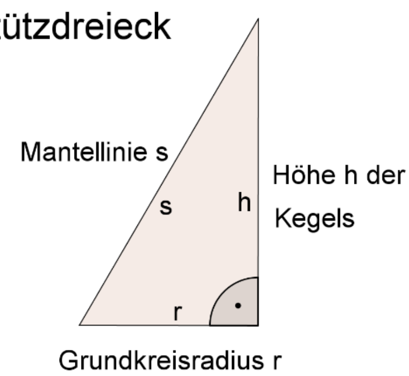
Raumgeometrie
Volumen- und Oberflächenformeln:

Für ein **Prisma** mit der Grundfläche G, der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:
V = G·h
O = 2 G + M

Bei einem Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche gilt: a = 3 cm und h = 5 cm.
Berechne das Volumen.

Höhe der Grundfläche: $h' = \frac{1}{2} \cdot 3\text{ cm} \cdot \sqrt{3} \approx 2{,}6\text{ cm}$
(Höhenformel im gleichseitigen Dreieck)

$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h' \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot 3\text{ cm} \cdot 2{,}6\text{ cm} \cdot 5\text{cm} \approx 19{,}5\text{ cm}^3$

Für einen **Zylinder** mit Grundkreisradius r und Höhe h gilt: $V = \pi r^2 h$ $\mathbf{O = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h}$	*Eine 12 cm hohe Kaffeedose hat die Form eines Zylinders mit einem Innendurchmesser von 8 cm.* *Kann man in die Dose 500 ml Kaffee einfüllen?* $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (4\,\text{cm})^2 \cdot 12\,\text{cm} \approx 603\,\text{cm}^3 \approx 600\,\text{ml}$. A: Man kann 500 ml Kaffee einfüllen.
Für eine **Pyramide** mit der Grundfläche G, der Mantelfläche M und der Höhe h gilt: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ $O = G + M$	*Eine Pyramide hat eine* *rechteckige Grundfläche: l = 8 cm; b = 1 cm,* *die Seitenkantenlänge: s = 1,8 cm und* *den Neigungswinkel ε einer Seitenkante: ε = 52°* *Welches Volumen hat eine solche Pyramide?*  Es ist $\sin\varepsilon = \frac{h}{s}$ oder $h = s \cdot \sin \varepsilon = 1{,}8\,\text{cm} \cdot \sin 52°$; $h \approx 1{,}4\,\text{cm}$ Daher $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot l \cdot b \cdot h$ $= \frac{1}{3} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} \cdot 1{,}4\,\text{cm}$ $V \approx 3{,}73\,\text{cm}^3$
Für einen **Kegel** mit Grundkreisradius r, Mantellinie s und Höhe h gilt: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $\mathbf{O = \pi r^2 + \pi r s}$	*Eine Eistüte hat die Form eines Kegels mit Grundkreisradius r = 3 cm und Mantellinie s = 10 cm. Wie viel Eis passt (theoretisch) in die Tüte?*  Pythagoras: $s^2 = r^2 + h^2$ Oder $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(10\text{cm})^2 - (3\text{cm})^2} \approx 9{,}5\text{cm}$ Daher $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = V = \frac{1}{3} \pi \cdot (3\text{ cm})^2 \cdot 9{,}5\text{ cm}$ $V \approx 89{,}5\text{ cm}^3$ A: Es passen ca. 89,5 cm³ Eis in die Tüte.