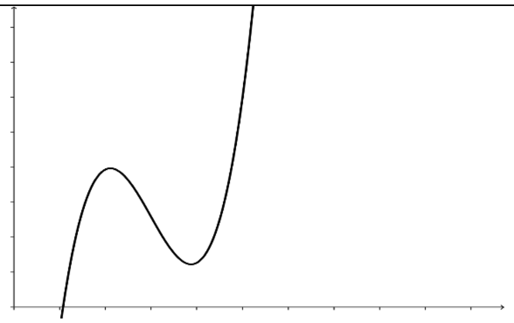
Wissen	Beispiel

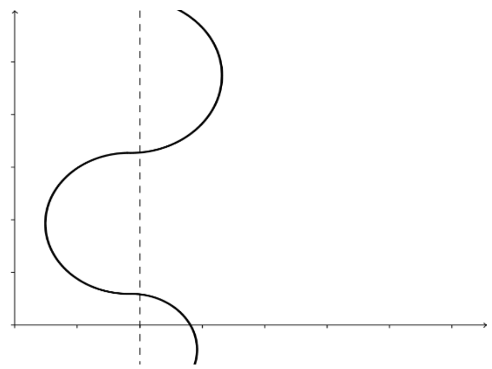
Themenbereich 1: Funktionen

Funktionsbegriff

Die Zuordnung $x \mapsto y$ heißt **Funktion**.
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Jeder x-Wert hat genau einen y-Wert.
Daraus folgt: f(x) = y



Funktionsgraph



Kein Funktionsgraph

Funktionen und Term

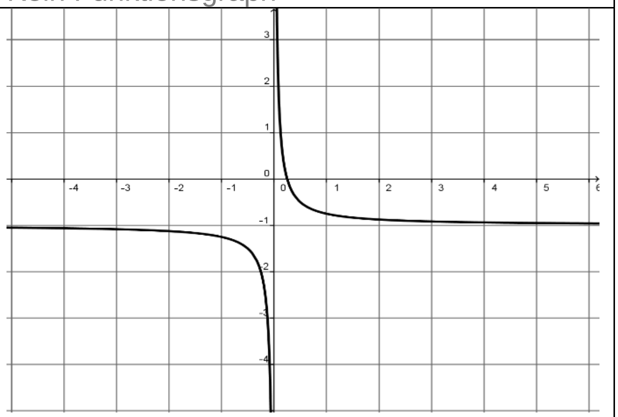
$f: x \mapsto f(x)$ mit $x \in D_f$

Alle Zahlen, für die bei einer Funktion f ein Funktionswert f(x) berechnet werden kann, bilden die **Definitionsmenge D_f**.

Ist keine Definitionsmenge angegeben, so ist die **maximale Definitionsmenge** $D_{f,max}$ gemeint.

Auf dem Graphen G_f liegen alle Punkte $P(x|y)$, deren x- und y-Koordinate die Funktionsgleichung y = f(x) erfüllen.
Es gilt für alle Punkte $Q(a|b)$:

$f(a) < b$	Q liegt oberhalb von G_f.
$f(a) = b$	Q liegt auf G_f.
$f(a) > b$	Q liegt unterhalb von G_f.



Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{4x} - 1$

Funktionsgleichung: $y = \frac{1}{4x} - 1$

Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

Wegen $f(1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ gilt:

$P\left(1 \middle| -\frac{3}{4}\right)$ liegt auf dem Graphen G_f.

$Q(1|0)$ liegt oberhalb des Graphen G_f.

$R(1|-1)$ liegt unterhalb des Graphen G_f.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit der x-Achse:

Lösen der Gleichung $f(x) = 0$

➔ $S_x(x|0)$

Die x-Koordinate des Schnittpunkts mit der x-Achse heißt **Nullstelle**. Es kann dabei keine, eine oder mehrere Nullstellen geben.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Berechne f(0).

➔ $S_y(0|f(0))$

Gegeben ist die Funktion f(x) = 2x + 4.

Schnittpunkt mit der x-Achse:

f(x) = 0

⇨ 2x +4 = 0

⇨ 2x = -4

⇨ x = -2

f(x) hat an der Stelle x = -2 eine Nullstelle.
Schnittpunkt mit der x-Achse: $S_x(-2|0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$

→ $S_y(0|4)$

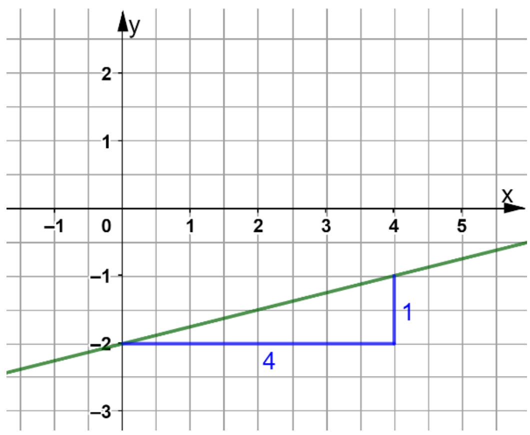
Themenbereich 2: Lineare Funktionen

Lineare Funktionen

Eine Funktion $f: x \mapsto mx + t$ mit m, t ∈ $\mathbb{Q}$ heißt **lineare Funktion**.

1. Der Parameter m gibt die **Steigung** an, t den **y-Achsenabschnitt**.
2. Der Graph der Funktion f ist eine Gerade und schneidet die y-Achse im Punkt (0|t).
3. Für $m > 0$ steigt der Graph, für $m < 0$ fällt der Graph.
4. Die Steigung m kann mit Hilfe von zwei Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ wie folgt berechnet werden:
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
5. Haben zwei lineare Funktionen die gleiche Steigung, so sind die beiden Geraden parallel zueinander.

Die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x - 2$ ist eine lineare Funktion.

1. Die Funktion f hat die Steigung $m = \frac{1}{4}$ und den y-Achsenabschnitt $t = -2$.
2. 

3. Der Graph G_f steigt, da $m > 0$.
4. Gegeben sind die beiden Punkte $P_1(4|-1)$ und $P_2(2|-1{,}5)$. Für die Steigung m gilt dann:
$$m = \frac{-1{,}5 - (-1)}{2 - 4} = \frac{-0{,}5}{-2} = \frac{1}{4}$$
5. Die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto 2x + 1$ und $g: x \mapsto 2x - 5$ sind parallele Geraden.

Bestimmung des Funktionsterms für lineare Funktionen

Fall 1:

Ein Punkt $P(x_P|y_P)$ und m sind bekannt.

1.) Allgemeine Geradengleichung:

$$y = mx + t$$

2.) Setze die x- und y-Koordinate des Punktes P sowie die Steigung m ein.

$$y_p = m \cdot x_P + t$$

3.) Löse die Gleichung nach t auf.

Fall 2:

Es sind zwei Punkte $P_1(x_1|x_2)$ und $P_2(x_2|y_2)$, die auf G_f liegen, bekannt.

1.) Allgemeine Geradengleichung:

$$y = mx + t$$

2.) Für die Steigung m gilt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

3.) Setze die x- und y-Koordinate des Punktes P_1 oder P_2 sowie die Steigung m ein.

$$y_1 = m \cdot x_1 + t$$

Oder

$$y_2 = m \cdot x_2 + t$$

4.) Löse die Gleichung nach t auf.

Fall 3:

Man kann durch einfaches Ablesen sowohl die Steigung m als auch t herauslesen.

Fall 1:

$P(4|5)$ liegt auf dem Graphen der linearen Funktion f mit der Steigung 2.

1.) Allgemeine Geradengleichung

$$y = mx + t$$

2.) Einsetzen der x- und y-Koordinate des Punktes P sowie der Steigung $m = 2$:

$$5 = 2 \cdot 4 + t$$

3.) Auflösen nach t:

$$5 = 8 + t \quad | -8$$

$$-3 = t$$

→ $f(x) = 2x - 3$

Fall 2:

$P_1(3|4)$ und $P_2(5|1)$ liegen auf dem Graphen der linearen Funktion f.

1.) Allgemeine Geradengleichung:

$$y = mx + t$$

2.) Für die Steigung m gilt:

$$m = \frac{1-4}{5-3} = -\frac{3}{2}$$

3.) Setze die x- und y-Koordinate des Punktes P_1 ein (auch mit P_2 möglich).

$$4 = -\frac{3}{2} \cdot 3 + t$$

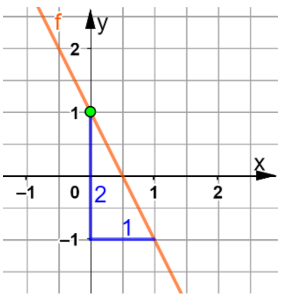
4.) Auflösen nach t:

$$4 = -\frac{9}{2} + t \quad | +\frac{9}{2}$$

$$\frac{17}{2} = t$$

→ $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$

Fall 3:



1.) y-Achsenabschnitt:

$t = 1$ (grün)

2.) Steigung:

$$m = \frac{-2}{1} = -2$$

→ $f(x) = -2x + 1$

Lineare Funktionen und lineare Gleichungen

Die Gleichung $mx + t = c$ kann sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch gelöst werden.
Zur rechnerischen Lösung sind Äquivalenzumformungen nötig.
Bei der zeichnerischen Lösung müssen die Graphen der linearen Funktionen $f: x \mapsto mx + t$ und $g: x \mapsto c$ gezeichnet werden. Der x-Wert des Schnittpunkts der beiden Graphen ist die Lösung der obigen Gleichung.

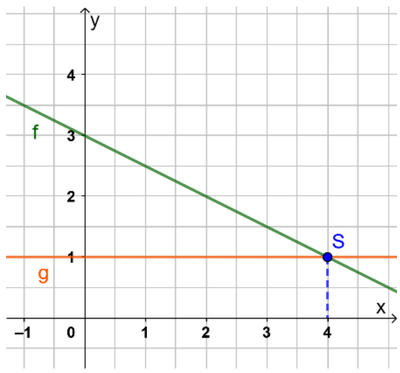
Gegeben ist die Gleichung $-\frac{1}{2}x + 3 = 1$.

<u>Rechnerische Lösung:</u>

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}x + 3 &= 1 && |-3\\
-\tfrac{1}{2}x &= -2 && |:-\tfrac{1}{2}\\
x &= 4
\end{aligned}
$$

→ $L = \{4\}$

<u>Zeichnerische Lösung:</u>



→ $L = \{4\}$

Bestimmung des Schnittpunkts zweier linearer Funktionen $f: x \mapsto m_1x + t_1$ und $g: x \mapsto m_2x + t_2$:

<u>Rechnerische Lösung:</u>

1.) Gleichsetzen der beiden Funktionsterme

$$m_1x + t_1 = m_2x + t_2$$

2.) Lösen der obigen Gleichung.
3.) Berechnung des y-Werts durch einsetzen des in 2.) bestimmten x-Werts in f oder g.
4.) Angeben des Schnittpunkts mit x- und y-Koordinate.

<u>Graphische Lösung:</u>

1.) Zeichnen der beiden linearen Funktionen.
2.) Ablesen des Schnittpunkts.

Bestimme den Schnittpunkt der beiden linearen Funktionen $f: x \mapsto 2x + 1$ und $g: x \mapsto -x + 4$.

<u>Rechnerische Lösung:</u>

1.) Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$2x + 1 = -x + 4$$

2.) Lösen der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= -x + 4 && |+x\\
3x + 1 &= 4 && |-1\\
3x &= 3 && |:3\\
x &= 1
\end{aligned}
$$

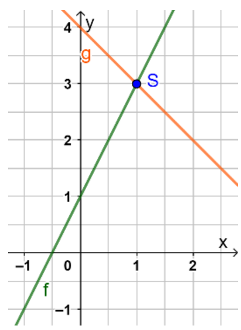
3.) Einsetzen des x-Werts in f (oder g):

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

4.) $S(1|3)$

<u>Graphische Lösung:</u>

1.)



2.) $S(1|3)$

Lineare Ungleichungen

Bei der Lösung von Ungleichungen kann analog zur Lösung von Gleichungen vorgegangen werden.

Aber Achtung: Bei der Multiplikation mit oder Division durch negative Zahlen dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Die Lösung einer Ungleichung kann sowohl in **Mengen-** als auch in **Intervallschreibweise** angegeben werden

Gegeben ist die lineare Ungleichung

$$(2-x)\cdot 7 < -21$$

$$\begin{aligned} (2-x)\cdot 7 &< -21 && |\text{Vereinfachen} \\ 14-7x &< -21 && |-14 \\ -7x &< -35 && |:(-7) \\ x &> 5 \end{aligned}$$

Mengenschreibweise: $L = \{x | x > 5\}$

Intervallschreibweise: $L =]-5; \infty[$

Direkte Proportionalität

Gehört zum Doppelten, Dreifachen, Halben, r-Fachen einer Größe das Doppelte, Dreifache, Halbe, r-Fache der anderen Größe, so heißt die Zuordnung **direkt proportional**.

Die Zuordnungsvorschrift lautet:

$$x \mapsto q \cdot x$$

Für direkt proportionale Zuordnungen gilt **Quotientengleichheit**.

Der konstante Quotient heißt **Proportionalitätsfaktor q**: $q = \frac{y}{x}$

Der Graph einer direkt proportionalen Zuordnung ist eine **Ursprungsgerade** mit Steigung q.

Benzinmenge in Abhängigkeit vom Preis:

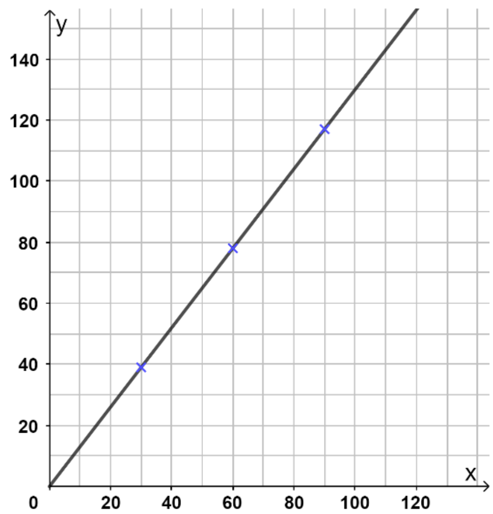
	x: Benzinmenge (in l)	y: Preis (in €)	
: 2	60	78 €	: 2
· 3	30	39 €	· 3
	90	117 €	

Quotienten:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y_1}{x_1} = \frac{78}{60} = 1{,}3 \\ \frac{y_2}{x_2} = \frac{39}{30} = 1{,}3 \\ \frac{y_3}{x_3} = \frac{117}{90} = 1{,}3 \end{array}\right\} \text{Quotientengleichheit}$$

→ Proportionalitätsfaktor: $q = 1{,}3$

→ Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto 1{,}3x$



Themenbereich 3: Gebrochen-rationale Funktionen

Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen

Terme mit einer Variablen im Nenner heißen **Bruchterme**.
Funktionen, deren Funktionsterm einen Bruchterm enthält, nennt man **gebrochen-rationale Funktionen**.

Die Definitionsmenge besteht aus allen Zahlen, für die der Nenner NICHT null wird.

Asymptoten sind Geraden, denen sich ein Graph immer weiter annähert.
Es gibt dabei u.a. senkrechte und waagrechte Asymptoten.

Den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion nennt man **Hyperbel**.

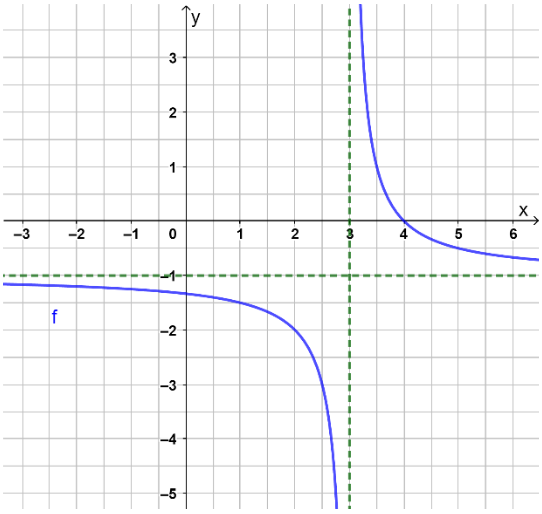
Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $f\colon x \mapsto \frac{1}{x-3} - 1$.

Definitionsmenge:

$$x - 3 = 0 \quad | + 3$$
$$x = 3$$

→ $D_f = \mathbb{Q}\backslash\{3\}$

Zeichnen des Graphen mit Hilfe einer Wertetabelle.



Senkrechte Asymptote: $x = 3$
Waagrechte Asymptote: $y = -1$

Verschiebung von Hyperbeln

Im Funktionsterm $f\colon x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$ einer gebrochen-rationalen Funktion führt der Parameter

- a zu einer Streckung ($|a| > 1$) bzw. Stauchung ($|a| < 1$) in y-Richtung. Für $a < 0$ erfolgt zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.
- b zu einer Verschiebung in negative ($b > 0$) bzw. positive ($b < 0$) x-Richtung.
- c zu einer Verschiebung in negative ($c < 0$) bzw. positive ($c > 0$) y-Richtung.

Der Graph G_f besitzt die senkrechte Asymptote $x = -b$ und die waagrechte Asymptote $y = c$.

Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $f\colon x \mapsto \frac{-2}{x-1} + 1{,}5$

Der Graph der Funktion f geht aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ wie folgt hervor:

- Streckung in y-Richtung um den Faktor 2
- Spiegelung an der x-Achse
- Verschiebung um 1 LE in positive x-Richtung
- Verschiebung um 1,5 in positive y-Richtung

Der Graph G_f besitzt die senkrechte Asymptote $x = 1$ und die waagrechte Asymptote $y = 1{,}5$

Funktionsterme von Hyperbeln ablesen

<u>Schritt 1:</u>

Zeichne die senkrechte und waagrechte Asymptote ein.

<u>Schritt 2:</u>

Bestimme die Parameter b und c anhand der senkrechten und waagrechten Asymptote.

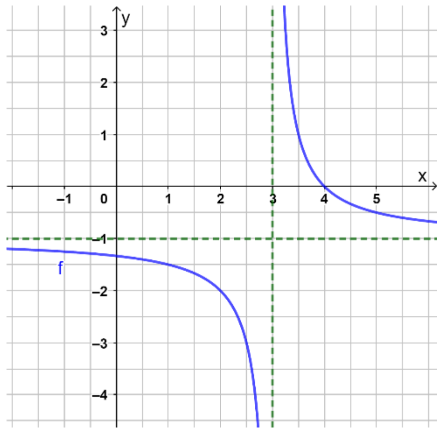
<u>Schritt 3:</u>

Bestimme einen Punkt $P(x|y)$ auf dem Graphen.

<u>Schritt 4:</u>

Setze die x- und y-Koordinaten sowie die Parameter b und c in die allgemeine Funktionsgleichung $y = \frac{a}{x+b} + c$ ein und löse nach a auf.

Bestimme den Funktionsterm der Funktion f.



<u>Schritt 2:</u>

Senkrechte Asymptote: $x = 3$ → $b = -3$

Waagrechte Asymptote: $y = -1$ → $c = -1$

<u>Schritt 3:</u>

$P(1|-1{,}5)$ liegt auf G_f.

<u>Schritt 4:</u>

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x+b} + c \\ -1{,}5 &= \frac{a}{1-3} - 1 \qquad &|+1 \\ -0{,}5 &= \frac{a}{-2} \qquad &|\cdot(-2) \\ 1 &= a \end{aligned}$$

→ $f(x) = \frac{1}{x-3} - 1$

Umgekehrt proportionale Zuordnungen

Gehört zum Doppelten, Halben, r-Fachen der einen Größe das Halbe, das Doppelte, der r-te Teil der anderen Größe, so heißt die Zuordnung **<u>indirekt proportional</u>**.

Die Zuordnungsvorschrift lautet:

$$x \mapsto \frac{p}{x}$$

Für indirekt proportionale Zuordnungen gilt **<u>Produktgleichheit:</u>** $p = x \cdot y = const.$

Der Graph einer indirekt proportionalen Zuordnung ist eine **<u>Hyperbel</u>**.

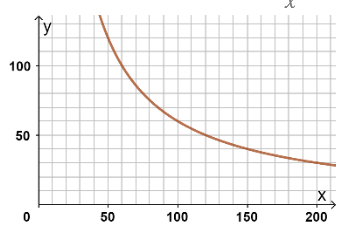
Nahrungsvorrat in Abhängigkeit von der Anzahl an Portionen:

	Vorrat (in g)	Anzahl Portionen	
	300	20	
:3			·3
	100	60	
·10			:10
	1000	6	

Produkte:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \cdot y_2 &= 300 \cdot 20 = 6000 \\ x_2 \cdot y_2 &= 100 \cdot 60 = 6000 \\ x_3 \cdot y_3 &= 1000 \cdot 6 = 6000 \end{aligned}\right\} \quad p = 6000$$

Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto \frac{6000}{x}$



Themenbereich 4: Bruchterme und Bruchgleichungen

Rechnen mit Bruchtermen	
Wird ein Bruch gekürzt bzw. erweitert, so wird sowohl der Zähler als auch der Nenner mit der gleichen Zahl/Variablen multipliziert/dividiert.	$\frac{x^2+2x}{4+2x}=\frac{x(x+2)}{2\cdot(2+x)}=\frac{x}{2}$
Bruchterme können nur dann addiert bzw. subtrahiert werden, wenn bei allen Brüchen der Nenner gleich ist. Oftmals muss man deshalb sinnvoll erweitern (Hauptnenner finden), so dass die beiden Brüche addiert/subtrahiert werden können. Der Nenner bleibt dabei erhalten, lediglich die Zähler werden addiert/subtrahiert.	$\frac{4}{x}-\frac{2x-3}{x-1}=\frac{4(x-1)}{x(x-1)}-\frac{(2x-3)x}{(x-1)x}$ $=\frac{4x-4-(2x^2-3x)}{x(x-1)}=\frac{-2x^2+7x-4}{x(x-1)}$
Zum Multiplizieren von Bruchtermen muss Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler multipliziert werden.	$\frac{3x}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x^2}=\frac{3x\cdot(2x+1)}{(2x+1)\cdot x^2}=\frac{3}{x}$
Zum Dividieren zweier Bruchterme muss der Kehrbruch des Divisors mit dem Dividenden multipliziert werden.	$\frac{2x}{x+1}:\frac{x-2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x-2}$ $=\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x}{x-2}$
Rechengesetze für Potenzen	
Für negative Exponenten gilt: $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ Potenzgesetze: Für $a,b\neq 0$ und ganzzahlige Exponenten p und q gilt: 1.) $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$ bzw. $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$ 2.) $a^p\cdot b^p=(a\cdot b)^p$ bzw. $\frac{a^p}{b^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^p$ 3.) $(a^p)^q=a^{p\cdot q}$	$\frac{x^2\cdot(x^{-3})^2}{x^{-2}}=\frac{x^2\cdot x^{-6}}{x^{-2}}=x^{2-6-(-2)}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

Bruchgleichungen

Zum Auflösen von Bruchgleichungen muss mit dem Hauptnenner beider Brüche multipliziert werden.

Als Lösung kommen nur Inhalte der Definitionsmenge in Frage.

$$\frac{2x-1}{1-3x} = \frac{x+1}{6x-2}$$

$$\frac{2x-1}{1-3x} = \frac{x+1}{-2(-3x+1)} \quad |(-2)(-3x+1)$$

$$\frac{(-2)(-3x+1)(2x-1)}{1-3x} = \frac{(-2)(-3x+1)(x+1)}{-2(-3x+1)}$$

$$(-2)(2x-1) = x+1$$

$$-4x+2 = x+1$$

$$5x = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$L = \left\{\frac{1}{5}\right\}$$

Themenbereich 5: Laplace-Experimente

Ergebnismenge (Ergebnisraum)

Ergebnismenge nennt man die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes. Sie wird mit Ω bezeichnet. Die einzelnen Ergebnisse werden mit ω_1, $\omega_2, \omega_3, \ldots$ bezeichnet.

Werfen eines Würfels:

Ω = {1;2;3;4;5;6}

$\omega_1 = 1; \omega_2 = 2; \omega_3 = 3; \ldots$

Werfen einer Münze :

Ω = {Kopf; Zahl} oder Ω = {0;1}

Ereignis/ Teilmenge

Jede Teilmenge A der Ergebnismenge Ω eines Zufallsexperiments nennt man Ereignis. Jedes Element des Ereignisses A ist in Ω enthalten.

Man schreibt auch A ⊂ Ω.

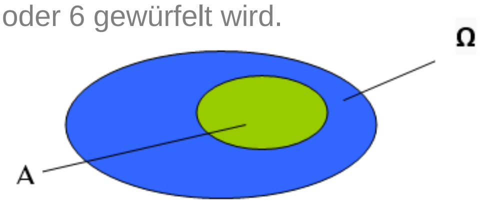
Wenn bei einer Durchführung des Zufallsexperiments ein Ergebnis aus A auftritt, ist das Ereignis A eingetreten.

Zufallsexperiment: „Einmaliges Werfen eines Würfels“

Ereignis A: „Augenzahl des Würfels gerade“

$\Rightarrow$ A= $\{2,4,6\}$.

Das Ereignis A ist dann eingetreten, wenn 2, 4 oder 6 gewürfelt wird.



Gegenereignis

Zu jedem Ereignis A gibt es ein Gegenereignis $\bar{A}$, welches aus den Ergebnissen aus Ω besteht, die nicht zu A gehören. Man schreibt auch: $\bar{A}$ = Ω \ A

Gegenereignis zu Ereignis A:

$\bar{A}$: „Augenzahl des Würfels ungerade“

$\bar{A} = \{1,3,5\}$

Wahrscheinlichkeit Dem Ereignis A wird bei einem Zufallsexperiment eine Wahrscheinlichkeit P(A) zwischen Null und Eins zugeordnet. Die relative Häufigkeit von A, die bei zunehmenden Wiederholungen des Experimentes auftritt, nähert sich dem Wert von P(A) an (**Empirisches Gesetz der großen Zahlen**).	„Einmaliges Werfen eines fairen Würfels“: P(„gerade Zahl“)= 0,5 P(„ungerade Zahl“)= 0,5
Laplace-Experimente Bei einem Laplace-Experiment sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis bei einem Laplace-Experiment mit n Ergebnissen beträgt somit $\frac{1}{n}$.	Werfen eines fairen Würfels oder einer fairen Münze.
Laplace-Wahrscheinlichkeit Um bei einem Laplace-Experiment an die Wahrscheinlichkeit P(A) des Ereignisses zu bekommen, muss man die Anzahl der für A zutreffenden Ergebnisse durch die Gesamtzahl der Ergebnisse dividieren. $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$ Man spricht auch: „die Mächtigkeit von A durch die Mächtigkeit von Ω“.	Einmaliges Werfen eines fairen Würfels: Ω = {1;2;3;4;5;6} Ereignis A = „Augenzahl gerade“ A = {2;4;6} Es ergibt sich die Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{3}{6} = 0{,}5$
Zählprinzip Wird aus k verschiedenen Mengen mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ Elementen gezogen, so gibt es $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ verschiedene Möglichkeiten.	Eva hat vier Hosen ($m_1 = 4$), drei Pullover ($m_2 = 3$) und zwei Paar Schuhe ($m_3 = 2$). Dann gibt es für sie 4 · 3 · 2 = 24 Möglichkeiten, sich verschieden zu kleiden.

Themenbereich 6: Lineare Gleichungssysteme

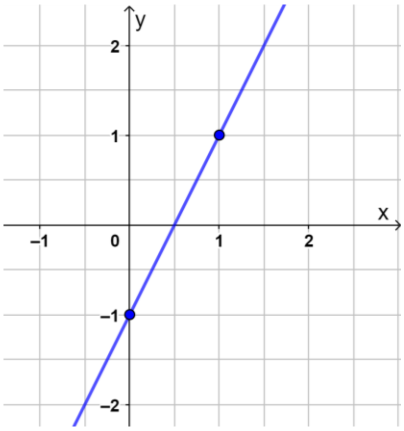
Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Für eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten gilt:

1. Die Lösung ist immer ein Zahlenpaar.
2. Es gibt unendliche viele Lösungen.
3. Alle möglichen Lösungen liegen auf einer Geraden.

Lösungen der Gleichung $4x - 2y = 2$ sind z.B. (1|1) und (0|-1).

Sie liegen auf der Geraden $y = 2x - 1$.



Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen (LGS)

Ein lineares Gleichungssystem besteht aus zwei oder mehreren Gleichungen mit 2 Unbekannten:

(I) 3 x + 7 y = 10

(II) 5 x – y = 4

Falls ein Zahlenpaar jede Bedingung des LGS erfüllt, so ist es die Lösung des Systems.

Ein LGS hat entweder genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Lineares Gleichungssystem:

(I) $3x + 7y = 10$

(II) $5x - y = 4$

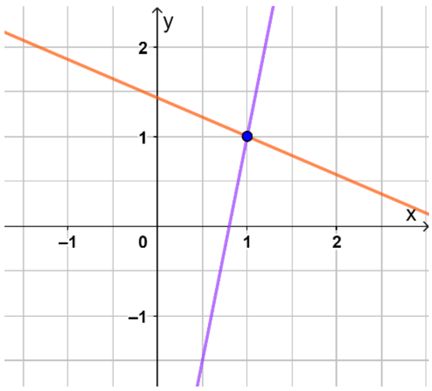
Zeichnerisches Lösen eines LGS mit zwei Variablen

Ein LGS kann zeichnerisch gelöst werden, indem die beiden Geraden in ein Koordinatensystem eingetragen werden. Dabei entsteht ein Schnittpunkt, der beide Bedingungen erfüllt und somit als Lösung des LGS gilt.

Zeichnerische Lösung:

(I) $y = -\frac{3}{7}x + \frac{10}{7}$

(II) $y = 5x - 4$



Schnittpunkt: S(1|1)

→ $L = \{(1|1)\}$

Zwei Rechenverfahren zum Lösen eines LGS	Gegeben ist das lineare Gleichungssystem (I) $3x - 4y = 5$ (II) $x - 2y = -1$
1. Einsetzungsverfahren: Beim Einsetzungsverfahren wird eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst. Die erhaltene Bedingung wird anschließend in die zweite Gleichung eingesetzt und diese kann nun aufgelöst werden. Anschließend wird das Ergebnis wieder in die erste Bedingung eingesetzt und die zweite Variable berechnet.	Gleichsetzungsverfahren: Löse (II) nach x auf: (IIa): $x = -1 + 2y$ Setze (IIa) in (I) ein: $3 \cdot (-1 + 2y) - 4y = 5$ Löse die Gleichung nach y auf: $-3 + 6y - 4y = 5$ $-3 + 2y = 5 \quad \mid +3$ $2y = 8 \quad \mid :2$ $y = 4$ Einsetzen in (IIa): $x = -1 + 2 \cdot 4 = 7$ → $L = \{(7\|4)\}$
2. Additionsverfahren Beim Additionsverfahren werden die zwei Gleichungen so miteinander addiert bzw. voneinander subtrahiert, dass eine der beiden Variablen wegfällt. Hierfür muss oftmals durch Multiplizieren eine der beiden Gleichungen vorbereitet werden. Anschließend muss die Gleichung nach der verbliebenen Variable aufgelöst werden. Das erhaltene Ergebnis wird anschließend wieder in die Ausgangsgleichung eingesetzt und man erhält das Lösungspaar.	Additionsverfahren: (I) $3x - 4y = 5$ (II) $x - 2y = -1 \quad \mid \cdot (-3)$ ——— (I) $3x - 4y = 5$ (IIa) $-3x + 6y = 3 \quad$ |(I) + (IIa) ——— $2y = 8$ → $y = 4$ $y = 4$ in (II) einsetzen: $x - 2 \cdot 4 = -1$ → $x = 7$ $L = \{(7\|4)\}$

Lineare Gleichungssysteme in Anwendungssituationen Folgende Schritte sollten beachtet werden: 1. Variablen einführen 2. Gleichungen aufstellen 3. Gleichungssystem lösen 4. Ergebnis überprüfen und Antwort formulieren	Peter ist 6 Jahre älter als sein Bruder. Zusammen sind sie 30 Jahre alt. Wie alt ist Peter bzw. sein Bruder? 1. x: Peters Alter; y: Alter des Bruders 2. Gleichungen aufstellen: (I) $x + y = 30$ (II) $x - 6 = y$ 3. Gleichungssystem lösen (hier mit Einsetzungsverfahren) (Ia): $x = 30 - y$ Einsetzen in (II): $(30 - y) - 6 = y$ $24 - y = y$ $24 = 2y \quad \mid +y$ $12 = y \quad \mid :2$ Einsetzen in (Ia): $x = 30 - 12 = 18$ 4. Überprüfen: $12 + 18 = 30$ $18 - 6 = 12$ A: Peter ist 18 Jahre alt und sein Bruder 12.
Themenbereich 7: Kreis, Prisma und Zylinder	
Der Kreis Die Kreiszahl π hat unendlich viele Nachkommastellen und ist nicht periodisch, $\pi \notin \mathbb{Q}$. Umfang des Kreises: $U = 2\pi r = d \cdot \pi$ Flächeninhalt des Kreises: $A = r^2\pi$	$\pi \approx 3{,}14$ Für einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 3{,}4\ m$ und damit dem Radius $r = 1{,}7\ m$ gilt: Umfang: $U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$ $\approx 3{,}14 \cdot 3{,}4\ m \approx 10{,}7\ m$ Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1{,}7m)^2$ $\approx 3{,}14 \cdot 2{,}89\ m^2 \approx 9{,}1\ m^2$
Das Prisma Für ein **Prisma** mit der Grundfläche G, der Mantelfläche M und der Höhe h gilt: $V = G \cdot h$ $O = 2G + M$	Bei einem Prisma mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche gilt: $a = 3\ cm$, $b = h_a = 2\ cm, c = 3{,}6cm$ und $h = 8\ cm$. Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt. $G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 3\ cm \cdot 2\ cm = 3\ cm^2$ $M = 3cm \cdot 8cm + 2cm \cdot 8cm + 3{,}6cm \cdot 8cm =$ $= 68{,}8cm^2$ $V = G \cdot h = 3cm^2 \cdot 8\ cm = 24\ cm^3$ $O = 2G + M = 2 \cdot 3cm^2 + 68{,}8cm^2 = 74{,}8cm^2$

Der Zylinder Für einen **Zylinder** mit Grundkreisradius r und Höhe h gilt: $V = G \cdot h = \pi r^2 h$ $O = 2G + M = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$	Eine 12 cm hohe Kaffeedose hat die Form eines Zylinders mit einem Innendurchmesser von 8 cm. Kann man in die Dose 500 ml Kaffee einfüllen? Berechne auch den Oberflächeninhalt der Kaffeedose. $V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot (4\ cm)^2 \cdot 12cm = 603cm^3$ $V \approx 600\ ml$ A: Man kann 500 ml Kaffee einfüllen. $O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$ $O = 2 \cdot 3{,}14 \cdot (4cm)^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4cm \cdot 8cm$ $O \approx 301cm^2$

Übungsaufgaben:

http://www.mathe-physik-aufgaben.de/sch_gm_08_mathe.html

http://smart.uni-bayreuth.de/